UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Reimpresos

Duplicación de textos y documentos académicos

Dirección de Bienestar Universitario
y el Departamento de Publicaciones

LÓGICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

DIANA PATRICIA ACEVEDO VÉLEZ

JUAN CARLOS ARANGO PARRA

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Departamento de la Enseñanza de las Ciencias y las Artes
Medellín
2012

Primera edición: agosto de 2012
Terminación: Imprenta Universidad de Antioquia

Reimpresos, duplicación de textos y documentos académicos
Teléfono: (574) 219 53 38
Correo electrónico: reimpresos@udea.edu.co

Reimpresos: Programa solidario de la Dirección de Bienestar Universitario y el Departamento de Publicaciones, que tiene como objetivo editar y distribuir textos y documentos académicos de mayor demanda, para hacerlos asequibles a la comunidad universitaria, en cumplimiento de disposiciones legales y con criterios de economía y calidad

Índice general

Capítulo 1

Sistemas Formales

El **lenguaje natural** se refiere a las distintas lenguas utilizadas por las diferentes comunidades de hablantes en sus procesos de comunicación (Castellano, Inglés, Frances, etc). Se designan así porque son convenciones humanas construidas a lo largo de un gran periodo histórico. Así, cada forma de nombrar las cosas es convencional (está establecido de una manera determinada).

Este lenguaje se utiliza para los asuntos más diversos como son: expresar deseos, preguntar, suplicar... También se utiliza para hacer afirmaciones sobre lo que ocurre o para describir objetos y situaciones. Es este último uso el único que interesa a la ciencia, ya que se expone un conocimiento de algo (uso referencial).

El lenguaje natural es el vehículo de comunicación con el que se consigue una enorme expresividad y riqueza comunicativa. A la hora de expresar conocimientos presenta deficiencias, ya que pueden presentarse **paradojas**, en este punto es donde aparecen los mitos como una creación colectiva para dar una explicación racional o no de los diferentes fenómenos que acaecen en su cotidianidad, dando poderes sobrehumanos a seres inanimados y sobre los que se despliega una gran carga emocional, la subjetividad. Este lenguaje es ambiguo, no es exacto, por lo cual posibilita diversas interpretaciones. Es muy poco operativo, pero es el sistema con mayor capacidad expresiva, que permite conocer el mundo que habitamos e imaginar otros mundos.

Por otro lado, un **lenguaje artificial** surge para resolver los problemas que plantea el lenguaje natural, éste es creado de una manera absolutamente consciente y voluntaria, a diferencia de la espontaneidad que caracteriza a los lenguajes naturales.

Un caso particular de los lenguajes artificiales son los **"lenguajes formales"**, los cuales se definen completamente sin que haya necesidad de darle interpretación alguna. Además se puede identificar con el conjunto de palabras o **fórmulas bien formadas** (cadenas de signos o caracteres) de longitud finita formadas a partir de un **alfabeto** (conjunto de signos) y teniendo en cuenta unas **reglas de formación** (gramática). Por lo tanto, se puede decir que para definir un lenguaje formal es necesario:

1. Determinar el alfabeto: Conjunto de signos de la lengua (signos primitivos y/o signos auxiliares).

2. Determinar el conjunto de reglas de formación; son las que definen qué secuencias o cadenas de signos del alfabeto son fórmulas bien formadas (f.b.f.) de la lengua escrita. Una regla no contradiga la otra.

3. La designación anterior debe hacerse sin apelar a ninguna interpretación.

4. Cuando se determina el lenguaje formal se pueden dar algunas **definiciones**, es decir, autorizaciones para usar un signo abreviado (combinación de signos) en lugar de una combinación de signos primitivos o de otros signos ya definidos.

Dentro de los signos auxiliares más característicos están los signos de agrupación: Paréntesis, corchetes, llaves. Si se construye para un lenguaje formal, un mecanismo deductivo, esto lleva al concepto de sistema formal. Un **mecanismo deductivo** para un lenguaje formal L está constituido por el establecimiento de algunas fórmulas del lenguaje L, como **axiomas**, y/o el establecimiento explícito de un conjunto de reglas de transformación o **reglas de inferencia**; estas determinan qué relaciones entre las fórmulas del lenguaje constituyen relaciones de consecuencia inmediata (derivación o deducción de una fórmulas a partir de otras). Esto sin apelar a interpretaciones.

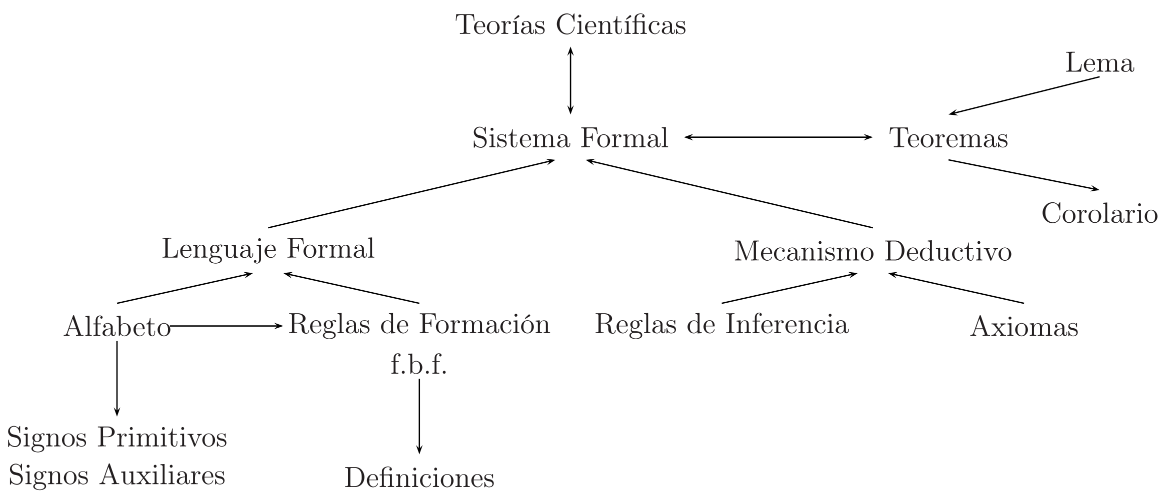
Los axiomas son también fórmulas bien formadas con las cuales se inician las teoría científicas y que no requieren deducciones sino que se asumen como verdaderas para la construcción de la misma.

A toda cadena que ha de deducirse a partir de los axiomas por aplicaciones sucesivas de las reglas de inferencia se le denomina **teorema**, al igual que a toda fórmula que se deduce de otros teoremas. Esta aplicación sucesiva de reglas recibe el nombre de **deducción** o **demostración**, las demostraciones se pueden presentar de dos maneras, por Afirmación-Razón o en prosa, en el ámbito científico se hace uso de la prosa, en estas notas se hará uso reiteradamente de la afirmación-razón con fines pedagógicos. La primera consiste en colocar un razonamiento (afirmar alguna f.b.f) y al frente su respectiva justificación (razón), la prosa consiste en ir narrando la demostración paso a paso de forma continua.

No siempre se deducen los teoremas a partir de los axiomas, algunos de estos poseen una estructura lógica donde una fórmula bien formada se debe presentar para garantizar que la conclusión sea cierta, por ejemplo en enunciados como “a se deriva de b”, “b se deduce a partir de a", "b es consecuencia de a", "si a entonces b" son equivalentes e implican que es necesario la presencia de a para que ocurra b, en este caso a recibe el nombre de **Hipótesis** mientras que b de **Tesis**, el enunciado completo es en sí el teorema. Cabe resaltar que no todo teorema tiene hipótesis.

En el lenguaje de algunas teoría científicas se hace uso de la palabra **Lema** como un teorema que sirve para demostrar otro teorema de mayor importancia dentro de dicha teoría, mientras que la palabra **Corolario** es un teorema que se deduce a partir del teorema previo de una forma inmediata.

Por su parte, un **Sistema formal** es un lenguaje formal dotado de un mecanismo deductivo. Los sistemas formales induce la creación de teorías científicas o el apoyo para estas. En el siguiente esquema se muestra la relación entre los conceptos hasta aquí mencionados.



La construcción de sistemas formales induce la creación de modelos que describen de una mejor forma los fenómenos que aquellos mitos no logran explicar. A continuación se ilustra los conceptos mencionados hasta este punto por medio de ejemplos.

Ejemplo 1.1. *A continuación se define un alfabeto así como una regla de formación*

$$Alfabeto : \{*, \Delta\}$$

Regla de Formación: Toda cadena finita que inicie con $*$

Bajo estas características se ha construido un lenguaje formal (alfabeto y regla de formación) mas no un sistema formal ya que carece un mecanismo de deducción. Para las siguientes cadenas se justificará al frente si cumplen o no con la definición de ser f.b.f *a.* $*\Delta$ *Sí es una f.b.f ya que es finita e inicia en* $*$.

b. $*;\Delta$ *No es una f.b.f puesto que el signo ; no hace parte del alfabeto.*

c. $\Delta\Delta$ *A pesar que es finita no es f.b.f. debido a que no comienza en* $*$.

d. $**\ldots$ *Los puntos suspensivos está indicando que la cadena es infinita por lo que no constituye una f.b.f.*

¿Cuántas f.b.f. se puede obtener si las cadenas solo tienen dos elementos? ¿Cuántas con tres elementos? La respuesta a la primer pregunta es 2 las cuales son $**$ *y* $*\Delta$. *Con tres elementos se consiguen 4 fórmulas bien formadas a saber* $***$, $**\Delta$, $*\Delta*$, $*\Delta\Delta$. *Haga el mismo proceso para determinar cuántas f.b.f. se obtienen si se utilizan 4 y 5 signos del alfabeto y generalice para 10 elementos.*

Ejemplo 1.2. *Se tiene la siguiente información: El alfabeto es el conjunto* $L = \{a, b, c\}$. *¿Se tiene un lenguaje formal? ¿Se tiene un sistema formal? Ambas preguntas tienen respuesta negativa debido a que es necesario definir reglas de formación para inducir un lenguaje formal. En este caso se tienen los elementos para trabajar, pero no que se hará con ellos.*

Ejemplo 1.3. *Para esta situación se tiene una regla de formación*

Regla de Formación: Toda cadena finita de signos que termine en p y ninguna otra

Con esta información no se logra un lenguaje formal, ya que se sabe como serán las cadenas, pero no con que elementos se trabaja, es decir, se adolece de un alfabeto.

Ejemplo 1.4. *Se cuenta con*

1. *Alfabeto:* $\{\Box, X, I\}$
2. *Regla de Formación: Toda cadena finita de signos del alfabeto que empiece por* $\Box$ *y ninguna otra.*
3. *Axiomas:*
   - *i.* $\Box IIX$
   - *ii.* $\Box\Box XII$
4. *Mecanismo Deductivo:*
   - *i. Cualquier signo de una cadena se puede duplicar.*
   - *ii. Si en una cadena existe el signo* XX *se puede reemplazar por* I.
   - *iii. Si en una cadena existe el signo* $\Box II$ *puede ser sustituido pr* X *siempre que la cadena resultante sea f.b.f.*

iv. Si en una cadena aparecen los signos IX *o* $\square\square\square$ *se pueden omitir siempre que la cadena resultante sea una f.b.f.*

v. Si en una cadena apararece la X *se le puede sustituir por* $X\square$.

vi. No hay otra regla.

Bajo estas condiciones se obtiene un sistema formal debido a que se cuenta con el alfabeto, las reglas de formación y el mecanismo de deducción. A continuación se obtendrá la cadena $\square II$ *(la cual es f.b.f.) a partir de los dos axiomas donde se utilizan las diferentes reglas de inferencia definidas anteriormente*

Deducción		**Deducción**	
1. $\square IIX$	Axioma i.	1. $\square\square XII$	Axioma ii.
2. $\square I$	Regla iv. en 1	2. $\square\square X\square II$	Regla v. en 1
3. $\square II$	Regla i. en 2	3. $\square\square XX$	Regla iii. en 2
		4. $\square\square I$	Regla ii. en 3
		5. $\square\square\square\square II$	Regla i. en 4
		6. $\square II$	Regla iv. en 5

En este caso la fórmula bien formada $\square II$ *recibe el nombre de* ***conclusión*** *o teorema ya que se obtuvo a partir de otras fórmulas bien formadas. Es necesario aclarar que la deducción no es lineal, es decir, no existe una forma única de obtener la conclusión sino que pueden existir diferentes caminos algunos de los cuales consiste en cambiar el orden de los pasos. Utilizando cualquiera de los axiomas deducir las f.b.f. siguientes* $\square\square II$ *y* $\square X$.

Deducción		**Deducción**	
1. $\square\square XII$	Axioma ii.	1. $\square\square XII$	Axioma ii.
2. $\square\square X\square II$	Regla v. en 1	2. $\square\square\square\square XII$	Regla i. en 1
3. $\square\square X\square III$	Regla i. en 2	3. $\square XII$	Regla iv. en 2
4. $\square\square XXI$	Regla iii. en 3	4. $\square X\square II$	Regla v. en 3
5. $\square\square II$	Regla ii. en 4	5. $\square XX$	Regla iii. en 4
		6. $\square XXXX$	Regla i. en 5
		7. $\square IXX$	Regla ii. en 6
		8. $\square X$	Regla iv. en 7

En este caso se utilizó el axioma ii.; hacer uso del axioma i. para modificar los razonamientos anteriores.

Ejemplo 1.5. *Consideremos el sistema formal*

1. *Alfabeto:* $\{s, t\}$

2. *Regla de Formación: Toda cadena finita*
3. *Mecanismo deductivo:*
   i. *Cualquier signo puede ser duplicado.*
   ii. *Si en una cadena aparece el signo tt puede ser omitida.*
   iii. *Si en una cadena aparece el signo sss se puede sustituir por t*
   iv. *A la derecha de s se puede adicionar t.*

Una conclusión se puede obtener a partir de otra fórmula bien formada, esta f.b.f que sustenta la conclusión se denomina ***Hipótesis*** *la cual se asume como verdadera y debe utilizarse dentro de la deducción de la conclusión. Se deducirán los siguientes teoremas*

1. ***Teorema 1****: De la f.b.f sstts deducir t.*

1. sstts	*. . . Hipótesis*
2. sss	*. . . Regla ii. en 1*
3. t	*. . . Regla iii. en 2*

2. ***Teorema 2****: De la f.b.f. sstts deducir tt.*

1. sstts	*. . . Hipótesis*
2. t	*. . . Teorema 1 en 1*
3. tt	*. . . Regla i. en 2*

3. ***Teorema 3****: La cadena tst se deriva de s.*

1. s	*. . . Hipótesis*
2. ss	*. . . Regla i. en 1*
3. ssss	*. . . Regla i. en 2*
4. ts	*. . . Regla iii. en 3*
5. tst	*. . . Regla iv. en 4*

Dentro de los aspectos importantes a resaltar es que un teorema se convierte en una fórmula bien formada y por lo tanto se puede utilizar para deducir otros teorema. Por un razonamiento análogo deducir tttt a partir de sstts y ttst cuya hipótesis es s.

El juego de dominó es una combinación de 28 piezas en forma rectangular (desde lo plano) donde se colocan dos números que pueden variar entre el cero y seis. ¿Por qué son 28? Son exactamente esta cantidad ya que si iniciamos con el cero es posible construir siete piezas: Los dos ceros, la cual se denotará $(0,0)$, el cero y el uno $(0,1)$, el cero y el dos (0,2) y así sucesivamente hasta el cero y el seis $(0,6)$. Para el 1 se forman seis piezas diferentes al anterior, $(1,1)$, $(1,2)$ hasta el $(1,6)$; la pieza $(1,0)$ es la misma $(0,1)$ por rotación. Siguiendo un proceso inductivo resultan las siguientes parejas de números

	0	1	2	3	4	5	6	Total
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)	(0,6)	7
1		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	6
2			(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	5
3				(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	4
4					(4,4)	(4,5)	(4,6)	3
5						(5,5)	(5,6)	2
6							(6,6)	1
								28

Sin embargo cada número aparece exactamente siete veces como se puede observar en la tabla anterior. Para todos es conocido el juego de dominó que se practica en la cotidianidad, construir el sistema formal que induce este juego.

Ejemplo 1.6. *Para resolver el anterior interrogante se tiene que el alfabeto lo constituyen las piezas de dicho juego, la regla de formación actúa en este caso como la forma en que pueden ser utilizadas las piezas del dominó para ello es necesario saber que dos piezas del dominó se utilizan (para formar una cadena) siempre y cuando tengan un número en común y que dicho número no se vuelve a utilizar para estas piezas. Con base esto*

1. *Alfabeto: Las 28 piezas del dominó que se denotan (i, j) donde i y j son cualquier número del 0 al 6, $i, j = 0, 1, \ldots, 6$.*

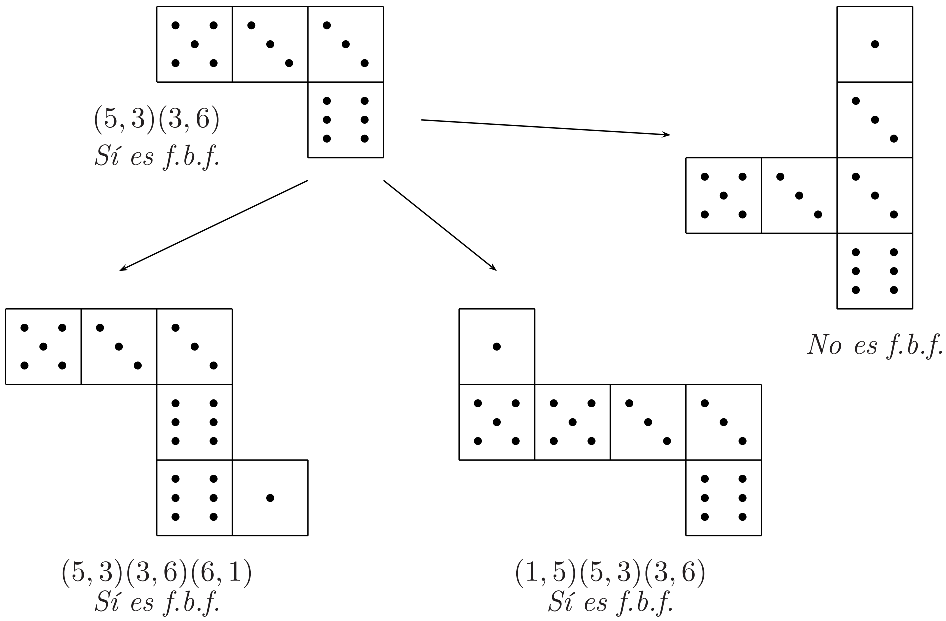
2. *Regla de formación: Una cadena de 2 elementos es f.b.f siempre que tengan un número en común, dicho número se utiliza una y sola una vez.*

La cadena $(5, 3)(3, 6)$ es bien formada por que el 3 es común y hace el puente entre las fichas $(5, 3)$ y $(3, 6)$, para que $(5, 3)(3, 6)$ siga siendo una f.b.f. se le debe agregar otra pieza del dominó que tenga el 5 o el 6 pero no el 3, así $(5, 3)(3, 6)(6, 1)$ es bien formada al igual que $(1, 5)(5, 3)(3, 6)$, pero no $(5, 3)(3, 6)(3, 1)$. En el siguiente diagrama se ilustra la situación.

Antes de pasar a las reglas de inferencia es necesario recordar que dentro del juego los pares son aquellas piezas que tienen los mismos números, esto es una convención no una obligatoriedad llamarse de esta forma, sin embargo constituye dentro del juego en una definición

3. *Definición: Un pieza donde los números son iguales se denominan pares, se escribe (i, i) para $i = 0, 1, \ldots, 6$.*

Las reglas de inferencia (mecanismo deductivo) consiste en las reglas del juego en los que está y no permitido para la practica del mismo es por ello que se proponen las siguientes:



4. *Reglas de inferencia:*

   a) *A cada jugador le corresponden siete piezas.*

   b) *Inicia el juego aquel que tenga el par* $(6,6)$ *o en su defecto el par siguiente de mayor a menor. El siguiente al turno es quien esté a la derecha de quien inicia.*

   c) *Es posible colocar dos pares simultáneamente excepto al inicio.*

   d) *Cede el turno quien no tenga posibilidad de colocar una pieza dentro de la cadena que esté en la mesa.*

   e) *El juego termina por dos situaciones: Alguien queda sin piezas o teniendo piezas nadie puede colocar por la configuración de la mesa en dicho caso se hace la sumatoria de los puntos (no de las fichas) que se tienen ganando el de la suma menor.*

Con estos elementos se ha construido el sistema formal que rige el juego del dominó, en este caso se están quitando las ambiguedades posibles que se puedan presentar en el desarrollo del juego. En esto consiste los sistemas formales en describir de forma precisa y objetiva.

1.1. Ejercicios

En cada uno de los conjuntos $\mathcal{A}$ que se presentan a continuación determinar si cumplen las condiciones de ser Lenguaje formal y Sistema Formal, explicando claramente. En el caso de los sistemas formales haga las deducciones necesarias de los teoremas justificando cada uno de los pasos.

1. El conjunto $\mathcal{A}$ está determinado por
   Alfabeto: $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, f(x), g(x)\right\}$

2. Para el conjunto $\mathcal{A}$ se define
   Regla de formación: Toda cadena finita que inicia en Δ y termina en Δ.

3. Sobre $\mathcal{A}$ se definen

   a) Alfabeto: $\{\mho, *\}$

   b) Regla de formación: Toda cadena de 4 signos del alfabeto que inicie en $\mho$.

   a) ¿Cuáles de las siguientes cadenas son f.b.f.?
   i) $\mho\mho\mho\mho$ ii) $\mho * *$
   iii) $\mho; *\mho$ iv) $\mho * **$

   b) ¿Cuántas f.b.f. se pueden formar bajo la regla de formación antes definida?

4. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto con las siguientes características

   a) Alfabeto: $\{1, -2, 3, -5, 0\}$
   Signos Auxiliares: $\{+, \times, (\ ,)\}$

   b) Regla de formación: Toda cadena finita de signos del alfabeto cuya suma o multiplicación sea un número natural.

   Resuelva

   a) Indique si las siguientes cadenas son f.b.f.
   i) $(-5) + 0$ ii) $1 \times 1 + (-2)$ iii) $3 + 3 + (-2) + (-2)$
   iv) $0 \times 0 + 0$ v) $1 + 1 + (-5) \times (-5)$ vi) $0 \times (-5) + (-5) \times 0$

   b) Determine el número de f.b.f. que se pueden encontrar si se toman solo dos signos del alfabeto y cuales son.

5. Sea $\mathcal{A}$ el lenguaje formal definido como

   a) Alfabeto: $L_1 = \{\Lambda, \Theta, \Omega\}$ y $L_2 = \{\diamondsuit\}$

b) Reglas de formación

i. Si x está en L_1, x es f.b.f.
ii. Si y está en L_2, y es f.b.f.
iii. Si z está en L_1 y w en L_2, wz es f.b.f.
iv. Ninguna otra secuencia de signos es f.b.f.

a) Construya seis f.b.f.

b) Justifique si las siguientes cadenas de signos son f.b.f.

i) $\Lambda\Omega$	ii) Ω	iii) $\Diamond\Diamond$
iv) $\Diamond$	v) $\Lambda\Diamond\Lambda$	vi) $\Diamond;\Theta$
vii) $\Diamond\Theta$	viii) $\Theta\Diamond$	ix) $\Theta\Theta$

c) ¿Cuántas f.b.f. se pueden construir con estas reglas de formación?

6. Consideremos un conjunto $\mathcal{A}$ con la siguiente estructura

a) Alfabeto: $\{a, b, c\}$

b) Regla de Formación: Toda cadena finita de signos del alfabeto que inician en a y terminan en c.

c) Reglas de Inferencia:

i. Todo signo del alfabeto puede ser triplicado.
ii. Cualquier cadena de dos signos puede ser omitida siempre y cuando la cadena resultante sea f.b.f.
iii. Las cadenas aa, bb y cc pueden reemplazarse por b, c y a, respectivamente, siempre que la cadena resultante sea f.b.f.
iv. No hay otra regla.

d) Axioma: abc

e) Teoremas:

1) $abcbc$
2) $acac$
3) ac

7. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto determinado por

a) Alfabeto: $\{a, e, m, t, l, i, n\}$

b) Regla de Formación: Toda cadena finita que produce una palabra del idioma español.

Encuentre siete f.b.f. que se pueden obtener con cuatro signos del alfabeto y cinco f.b.f haciendo uso de más de seis signos del alfabeto.

8. Construya un sistema formal con dos 2 axiomas, tres reglas de inferencia y hacer dos deducciones dentro del sistema formal.

9. Para el conjunto $\mathcal{A}$ se tiene la siguiente información

   a) Alfabeto: $\{p, q\}$

   b) Regla de Formación: Toda cadena finita de signos del alfabeto que inician en p y terminan en p.

   c) Reglas de Inferencia:

      i. Todo signo del alfabeto puede ser duplicado.

      ii. Cualquier cadena de dos signos puede conmutar siempre y cuando la cadena resultante sea f.b.f.

      iii. La cadena pp puede reemplazarse por q siempre que la cadena resultante sea f.b.f.

      iv. La cadena pq puede omitirse siempre que la cadena resultante sea f.b.f.

      v. No hay otra regla.

   d) Axioma: ppp

   e) Teoremas:

      1) pp

      2) $pqpqp$

      3) $pqqpqqp$

10. Sea $\mathcal{A}$ el conjunto con las siguientes características

   a) Alfabeto: $\{+, \times\}$

   b) Regla de Formación: Toda cadena finita de signos del alfabeto que inician en $+$ y terminan en $\times$.

   c) Reglas de Inferencia:

      i. Todo signo del alfabeto puede ser triplicado.

      ii. La cadena $+\times$ puede reemplazarse por $\times\times$ siempre que la cadena resultante sea f.b.f.

      iii. Las cadenas $+++$ o $\times\times\times$ puede ser omitidas siempre que la cadena resultante sea f.b.f.

      iv. No hay otra regla

   d) Axioma: $++\times\times$

   e) Teoremas:

      1) $++\times$

2) $+\times$
3) $+\times\times$

11. Sea $\mathcal{A}$ el sistema definido de la siguiente forma:

    a) Alfabeto: $\{+, *\}$

    b) Reglas de formación: Toda cadena finita de símbolos del alfabeto que comience por $+$.

    c) Axioma: $+***$

    d) Regla de inferencia: Toda fórmula de $\mathcal{A}$, cuyos dos últimos símbolos sean $+$ y $*$, en este orden, es una consecuencia inmediata de toda fórmula de $\mathcal{A}$, cuyos dos primeros símbolos sean $+$ y $*$, en este orden. Ninguna otra fórmula es una consecuencia inmediata de otra en $\mathcal{A}$.

    Responda

    1. ¿Es $\mathcal{A}$ un sistema formal?
    2. ¿Es $++*$ una consecuencia inmediata en $\mathcal{A}$ de $+***$?
    3. ¿Es $+*$ una consecuencia inmediata en $\mathcal{A}$ de $+*$?
    4. ¿Es $+**+$ una consecuencia inmediata de $+**+$?
    5. ¿Es $**++*$ una consecuencia inmediata de $+*+++ +$?
    6. Dar un ejemplo de una consecuencia inmediata en W de las cadenas $++++$, $*+++$, $*++*$ y $+**+$.

12. Por medio de enciclopedias o en internet busque la definición de cada una de las siguientes palabras: Axioma, teorema, proposición, lema, corolario, postulado y demostración. Compare con lo dicho anteriomente.

13. Con base en el ejemplo 1.6 construya un sistema formal para otro juegos como son: El ajedrez, el parqués, algún juego de cartas.

14. La teoría de conjuntos es el estudio formal de los conjuntos con relación a sus elementos, en ella se utiliza las relaciones de pertenencia de un elemento a un conjunto y la inclusión (subconjunto) de un conjunto en otro. Las operaciones entre conjuntos que se estudian son la unión, la intersección, la diferencia y la diferencia simétrica. Con base en esta información escriba el lenguaje formal (alfabeto y reglas de formación) que utiliza la teoría de conjuntos.

1.2. Resumen Conceptual

1. **Lenguaje natural**: Es el lenguaje utilizado por comunidades de humanos en sus procesos de comunicación.
2. **Paradojas**: Aquellos que se considera en contraposición con las opiniones o ideas generales o estandarizadas, es decir, en contraposición con la lógica.
3. **Lenguaje artificial**: Lenguaje creado de forma consciente y por consenso.
4. **Lenguaje Formal**: Es un lenguaje artificial donde los símbolos están definidos de manera específica.
5. **Alfabeto**: Conjunto de signos que se definen en un lenguaje formal.
6. **Fórmulas bien formadas**: Cadenas finitas de signos del alfabeto.
7. **Reglas de formación**: Son las reglas que determinan las formaciones de las cadenas de signos.
8. **Definiciones**: Son reglas que permiten abreviar signos existentes en el alfabeto.
9. **Mecanismo deductivo**: Está constituido por axiomas, reglas de inferencia y teoremas.
10. **Axiomas**: Son fórmulas bien formadas que se consideran verdaderas dentro del lenguaje formal.
11. **Reglas de inferencia**: Son fórmulas o reglas que permiten transformar las cadenas existentes en el lenguaje formal.
12. **Teorema**: Es una cadena que se puede deducir de otra a través de las reglas de formación.
13. **Demostración**: Es el proceso de obtención del teorema a través de las reglas de inferencia.
14. **Hipótesis**: En enunciados de la forma "Si a entonces b" al término **a** se le llama hipótesis, que es una condición para que se dé **b**.
15. **Tesis**: En enunciados de la forma "Si a entonces b" al término **b** se le llama tesis, que es la consecuencia de **a**.
16. **Lema**: Es un teorema que se demuestra previamente para facilitar la demostración de un teorema de mayor importancia.
17. **Corolario**: Es un teorema que se deduce inmediatamente del teorema previo.
18. **Sistema formal**: Es un lenguaje formal dotado de un mecanismo deductivo.

Capítulo 2

Lógica Proposicional

2.1. Proposiciones y Conectores

En el capítulo anterior se estudio los sistemas formales, para lo que es necesario definir un alfabeto, así como las fórmulas bien formadas, en el caso de la lógica proposicional las f.b.f son **proposiciones**, los cuales son enunciados que admiten un único valor de verdad ya sea *Verdadero* que se denota **V** o *Falso* y se escribe **F**. Las proposiciones se pueden denotar ya sea con letras mayúsculas latinas P, Q, R, etc., con letras latinas minúsculas p, q, r, etc., o colocando índices (indexar) cada una de ellas como $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ donde el n puede asumir cualquier valor natural.

Ejemplo 2.1. *Para el enunciado "Mercurio es el planeta más alejado del sol", se puede aseverar que es una proposición ya que posee un valor de verdad, en este caso es F. Mientras que el enunciado "¿Qué día es hoy?" no es una proposición, ya que la respuesta puede variar entre las sietes posibilidades que tiene la semana, sin embargo dicho enunciado se puede reformular para que sea una proposición diciendo "¿El día de hoy es jueves?", enunciado que admite ya un valor de verdad y que depende del día particular de la semana. Se debe tener en cuenta que los enunciados "¿Qué día es hoy?" y "¿El día de hoy es jueves?" no son equivalentes.*

Ejemplo 2.2. *La simbolización de proposiciones juega un papel muy importante dentro de las matemáticas, ya que permite pasar de un lenguaje natural a un lenguaje propio de las matemáticas y plantear las generalizaciones que sean posibles, así para el enunciado " $6 \div 4 = 2$" es una proposición falsa que se puede simbolizar como P:" $6 \div 4 = 2$" y así escribir que P es F.*

En el conjunto de números enteros se utiliza el símbolo $m.c.d(n, m)$ para hacer alusión al mayor número entero que divide a n y m de forma simultánea, así $m.c.d(4, 22)$ es 2, ya que de los divisores de 4 y 22, $D_4 = \{1, 2, 4\}$ y $D_{22} = \{1, 2, 11, 22\}$, los comunes son el 1 y el 2 y por tanto el máximo es 2.

Ejemplo 2.3. *En la expresión P_n:“ m.c.d$(n, 2) = 2$” con n un número natural, se debe conocer quién es n para garantizar que la expresión sea una proposición, es decir, que tenga un valor de verdad asociado. Si se hace $n = 1$ se obtiene la proposición P_1:“ m.c.d$(1, 2) = 2$” la cual es falsa, para $n = 2$, la proposición P_2:“ m.c.d$(2, 2) = 2$” es verdadera, siguiendo este proceso se deduce que si n es par la proposición resultante es verdadera y si n es impar la proposición es falsa, así P_{254} es verdadera y P_{1001} es falsa.*

Ejemplo 2.4. *Consideremos la proposición P :“ m.c.d.$(4, 8) = 3$” que tiene valor de verdad falso, ya que los divisores del 4 son el 1, 2 y el 4, mientras que de 8 son 1, 2, 4 y 8, así de los divisores comunes el mayor es 4, es por ello que la proposición P es falsa. A partir de P se puede construir otra proposición con el sentido contrario a P, por ejemplo Q :“ m.c.d$(4, 8) \neq 3$”, la cual constituye la negación de P y que además es verdadera. Dicha proposición Q también se puede escribir como $\sim P$, donde el símbolo $\sim$ hace alusión a la negación.*

Con base en el ejemplo 2.4 se sigue que dada una proposición P, de ella se puede obtener otra proposición con valor de verdad contrario, pero sin perder su sentido semántico (significación). Esta nueva proposición se llama la **negación** de P y se puede simbolizar como $\sim P$, $-P$ o $\neg P$, en el trascurso de las notas se hará alusión a la primer notación.

Para una proposición P están asociados dos posibles valores de verdad, V o F, (de allí el nombre de lógica bivalente) lo cual se resume diciendo que para una proposición P existen dos **posibilidades lógicas** y se representa en una tabla como sigue

P
V
F

Puesto que la negación de la proposición P, $\sim P$, tiene los valores contrarios a los de P entonces las posibilidades lógicas para $\sim P$ serán 2 también, pero en contraposición a los valores de P; si P es verdadera entonces $\sim P$ es falsa y si P es falsa, $\sim P$ es verdadera; esto lo escribimos como

P	$\sim P$
V	F
F	V

Para dos proposiciones P y Q existen en total cuatro posibilidades lógicas, resultantes de las combinaciones posibles de los valores de verdad de P y Q, estas son: Ambas verdaderas VV, la primera verdadera y la segunda falsa VF, la primera falsa y la segunda verdadera FV, y el último caso en que ambas sean falsas FF. Estas cuatro posibilidades se tabulan como

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

Nótese que se distribuyen los valores para P como VV y FF, es decir, en bloques de 2, mientras que para Q se alternan entre verdaderas y falsas comenzando con verdadera. Si por el contrario son tres proposiciones las que están implicadas, digamos P, Q y R el número de posibilidades lógicas son ocho como se resume en la siguiente tabla

P	Q	R
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Ahora, para la proposición P, se distribuyen las posibilidades como 4 verdaderas y 4 falsas, para la proposición Q como 2 verdaderas, 2 falsas, 2 verdaderas y 2 falsas y para la proposición R se alternan entre verdaderas y falsas.

Resumiendo los antes dicho resulta que para 1 proposición existen $2 = 2^1$ posibilidades lógicas, para 2 proposiciones, las posibilidades son $4 = 2^2$, para 3 proposiciones $8 = 2^3$ posibilidades, es decir, la cantidad de posibilidades lógicas crece exponencialmente con base 2, por lo tanto, en el caso que se tengan n proposiciones las cuales se pueden denotar como $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ entonces hay 2^n posibilidades lógicas.

2.1.1. Proposiciones Compuestas

Ejemplo 2.5. *El enunciado "2 es un número par o 2 es un número impar" es en sí una proposición ya que admite el valor de verdad V, puesto que cumple una de las dos opciones* *que se están planteando, en este caso que "2 es un número par". La proposición dada es posible escribirla en términos de dos proposiciones a saber P :"2 es un número par" y Q:"2 es un número impar", mientras que el término de enlace "o" entre las proposiciones P y Q recibe el nombre de conector.*

En el ejemplo 2.5 se hace alusión al **conector** como un enlace entre proposiciones, la "o" no es el único entre tales enlaces, la "y" permite también hacer la conexión entre dos proposiciones, así como el "si y solo si" entre otros. La negación $\sim$ no es un conector ya que no enlaza proposiciones sino que le cambia el valor de verdad a una proposición.

Las proposiciones se pueden clasificar en dos grupos de acuerdo con el concepto de conector, el de las **proposiciones simples** y el de las **proposiciones compuestas**, en el primero de estos hay solo una proposición, mientras que en el segundo hay varias proposiciones unidas o enlazadas por lo menos con un conector.

En el ejemplo 2.5 las proposiciones P y Q son simples, mientras que la proposición "2 es un número par o es un número impar" es compuesta llamada disyunción. Si P es una proposición simple entonces $\sim P$ también es una proposición simple.

Una **disyunción** es la proposición compuesta que resulta al unir dos proposiciones con el conectivo "o" que se simboliza "$\vee$", por lo que la disyunción entre P y Q se escribe $P \vee Q$. Para determinar cuando una disyunción es verdadera o falsa, recurrimos a una herramienta llamada **tabla de verdad** de la disyunción, donde se escriben todas las posibles combinaciones de los valores de verdad para dos proposiciones y luego el valor de verdad de la disyunción entre ellas

P	$\vee$	Q
V	**V**	V
V	**V**	F
F	**V**	V
F	**F**	F

Regresando al ejemplo 2.5 la proposición P es verdadera por ser 2 un número par, pero Q es falsa, de allí que la disyunción $P \vee Q$ es verdadera como ocurre en la segunda línea de la tabla de verdad de la disyunción.

De acuerdo con la tabla de verdad de la disyunción, dicha proposición compuesta es falsa siempre que las proposiciones simples P y Q sean falsas, en las otras tres posibilidades la disyunción es verdadera.

Ejemplo 2.6. *En la proposición compuesta "Los números 25 y 49 son cuadrados perfectos" se identifican las proposiciones simples P:"25 es un cuadrado perfecto" y Q:"49 es un cuadrado perfecto". La proposición compuesta es verdadera ya que $5^2 = 25$ y $7^2 = 49$ de allí que sean cuadrados perfectos; además P y Q como proposiciones simples son verdaderas también por igual razón.*

En el ejemplo 2.6 el conector que se utilizó fue la "y" que se simboliza como $\wedge$, mientras que la proposición compuesta "Los números 25 y 49 son cuadrados perfectos" se denota como $P \wedge Q$ y recibe el nombre de **conjunción**, la tabla de verdad de esta proposición compuesta es

P	$\wedge$	Q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**F**	V
F	**F**	F

En esta tabla se establece que una conjunción sólo es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas como ocurrió en el ejemplo 2.6, en las demás posibilidades lógicas la conjunción es falsa.

Ejemplo 2.7. *Para las proposiciones simples P:" 27+58 es divisible por 5", Q:"m.c.d(12,8)=4" y R:"111 es número primo", los valores de verdad de P, Q y R son V, V y F (111 se puede dividir por 3) respectivamente. Analicemos los valores de verdad de las siguiente proposiciones compuestas*

1. $P \vee (\sim Q \wedge R)$. *Para hallar el valor de verdad de esta proposición compuesta se inicia analizando la proposición compuesta del paréntesis, es decir, $\sim Q \wedge R$, como Q es verdadera entonces $\sim Q$ es falsa y por la tabla de verdad de la conjunción se tiene que $\sim Q \wedge R$ es falsa. Ahora bien, en $P \vee (\sim Q \wedge R)$, la proposición simple P es verdadera y $\sim Q \wedge R$ es falsa, de acuerdo con la tabla de verdad de la disyunción se concluye que $P \vee (\sim Q \wedge R)$ es una proposición verdadera. Esto es posible resumirlo en una tabla como*

P	$\vee$	$\sim Q$	$\wedge$	R
		F		F
V			F	
	$\boldsymbol{V}$			

2. $(P \vee R) \wedge \sim (P \vee R)$. *La proposición compuesta $P \vee R$ es verdadera puesto que P es verdadera y R falsa, es por ello que $\sim (P \vee R)$ es falsa debido a que cambia el valor*

de verdad de $P \vee R$. Por lo tanto la conjunción $(P \vee R) \wedge \sim (P \vee R)$ es falsa ya que $P \vee R$ es verdadera y $\sim (P \vee R)$ falsa, la tabla resume lo dicho

P	$\vee$	R	$\wedge$	$\sim$	P	$\vee$	R
V		F			V		F
	V					V	
	V			F			
			$\boldsymbol{F}$				

El **condicional** es la proposición compuesta que resulta al unir dos proposiciones con el conectivo "Si … entonces …" que se simboliza $\rightarrow$, se escribe entonces $P \rightarrow Q$ lo que se lee como "Si P entonces Q". En el lenguaje corriente se utiliza también una coma (,) a cambio de la palabra "entonces".

En el condicional $P \rightarrow Q$ a P se le llama antecedente, hipótesis, premisa o condición y a Q consecuente, tesis, conclusión o consecuencia, respectivamente. Cuando el condicional es lógicamente verdadero, se dice que existe una **implicación** y la expresión se lee "P implica Q" se puede simbolizar particularmente como $P \Rightarrow Q$. Otras formas de leer el condicional se resumen a continuación

P	Q	$P \rightarrow Q$
Hipótesis	Tesis	P es suficiente para Q
Antecedente	Consecuente	Q es necesario para P
Premisa	Conclusión	P solo si Q
Condición	Consecuencia	Q siempre que P
		Q por que P

En la columna tres de la tabla inmediatamente anterior se hace alusión a los términos **necesario** y **suficiente**, lo cual permite clasificar los condicionales en tres categorías:

1. Suficientes pero no necesarias: Cuando la condición basta, pero no es indispensable para la realización de un acontecimiento.
2. Necesarias pero no suficientes: Cuando la condición es indispensable para la realización de un acontecimiento, pero no basta.
3. Necesarias y suficientes: Cuando la condición basta y es indispensable para que se realice un acontecimiento.

En los ejemplos siguientes se analiza cada una de las categorizaciones planteadas.

Ejemplo 2.8. *La implicación "Si un cuadrilátero es un cuadrado entonces es un rectángulo" ilustra una condición suficiente, puesto que todos los cuadrados tienen sus cuatro ángulos iguales y por lo tanto es un rectángulo, así es suficiente que sea cuadrado para ser rectángulo pero no es necesario ya que no requiere que los lados sean iguales.*

Ejemplo 2.9. *La proposición compuesta "Si un número es divisible por 2 entonces es divisible por 6" representa una implicación que es necesaria pero que no es suficiente, debido a que números como* $6, 8, 10, 12$ *son números divisibles por 2 pero de ellos* 8 *y* 10 *no son divisibles por* 6*, así la condición es necesaria más no suficiente.*

Ejemplo 2.10. *La proposición "Un número es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es un múltiplo de* 3*" es una implicación necesaria y suficiente, ya que el número* 453 *es divisible por 3 y además la suma de los dígitos es tal que* $4+5+3=12$ *que es un múltiplo de* 3*. Si por el contrario se tiene la suma* $2+5+8=15$ *que es un múltiplo de* 3 *entonces los posibles números que se forman con los términos de la suma son* 258*,* 285*,* 528*,* 582*,* 825 *y* 852 *cada uno de los cuales es divisible por* 3*. Es por ello que la condición es necesaria y suficiente.*

Para que la implicación del ejemplo 2.8 sea necesaria y suficiente se modifica haciendo alusión a los ángulos del cuadrilátero que son los que caracterizan el rectángulo, así la proposición "Un cuadrilátero es un rectángulo si sus ángulos son iguales" es necesaria y suficiente. Mientras que en el ejemplo 2.9, para que un número sea divisible por 6 se requiere también que sea divisible por 3, así la proposición "Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y 3" es una implicación necesaria y suficiente.

A la proposición compuesta $P \rightarrow Q$ están asociados los condicionales

1. $Q \rightarrow P$ llamado **recíproco**.
2. $\sim P \rightarrow \sim Q$ llamado **contrario**.
3. $\sim Q \rightarrow \sim P$ llamado **contrarrecíproco**

Ejemplo 2.11. *Consideremos el condicional "Si un número termina en 5 entonces es divisible por 5" el cual se puede simbolizar como* $P \rightarrow Q$ *donde* P *:"Un número termina en 5" y* Q*:"un número es divisible por 5"; el condicional* $P \rightarrow Q$ *es verdadero. Ahora bien, el contrario (*$\sim P \rightarrow \sim Q$*), el recíproco (*$Q \rightarrow P$*) y el contrarrecíproco (*$\sim Q \rightarrow \sim P$*) se escriben en lenguaje natural como*

1. *Contrario: "Si un número no termina en 5 entonces no es divisible por 5"*
2. *Recíproco: "Si un número es divisible por 5 entonces termina en 5"*

3. Contrarrecíproco: "Si un número no es divisible por 5 entonces no termina en 5"

El valor de verdad del contrario y del recíproco son falsos, ya que si el número es el 40, éste no termina en 5 y sin embargo se puede dividir por 5 puesto que $5 \cdot 8 = 40$. *Mientras que el contrarrecíproco es verdadera puesto que si el número no es divisible por 5 entonces no termina en 5 por que en caso contrario sí lo sería.*

En el ejemplo 2.11 se sigue que si un condicional es verdadero, el recíproco no siempre es cierto, es decir en la implicación $P \to Q$ no pueden cambiarse el antecedente y el consecuente de forma indistintiva. Mientras que el valor de verdad del contrarrecíproco tiene asociado el mismo valor de verdad del condicional como se demostrará posteriormente en el teorema 2.6.

En la tabla de verdad asociada a una implicación se sigue que el condicional es falso si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

P	$\to$	Q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	V
F	**V**	F

En el siguiente ejemplo 2.12 se ilustra una situación matemática en la cual al ser el antecedente verdadero se deduce un consecuente falso, lo que es en sí una contradicción de acuerdo con la tabla de verdad del condicional dada anteriormente.

Ejemplo 2.12. *Por el concepto de potenciación resulta que* $2^2 = 2 \cdot 2$, *si se asume que* $x = 2$ *entonces la igualdad anterior se puede escribir como* $x^2 = 2x$, *veamos los siguientes pasos*

1. $x^2 = 2x$	... *Igualdad dada*
2. $x^2 - 4 = 2x - 4$	... *Restando 4 a ambos lados en 1*
3. $(x+2)(x-2) = 2(x-2)$	... *Factorizando en 2*
4. $x + 2 = 2$	... *Cancelando* $x - 2$ *en 3*
5. $x = 0$	... *Resolviendo la ecuación en 4*

Por la elección inicial $x = 2$ *y como se halló que* $x = 0$ *entonces por transitividad* $2 = 0$ *igualdad que no es cierta, es por ello que el condicional "Si* $2^2 = 2 \cdot 2$ *entonces* $2 = 0$*" es falso puesto que el antecedente es verdadero, mientras que el consecuente es falso. La contradicción que se obtiene surge en el paso 4 de la deducción ya que al ser* $x = 2$ *entonces* $x - 2 = 0$ *y* *el cero no se puede cancelar a ambos lados de la igualdad, por ejemplo* $0 \cdot 5 = 0 \cdot 3$ *pero* $5 \neq 3$.

Para el ejemplo 2.13 donde se ilustra por que un antecedente puede ser falso y obtener una conclusión verdadera, se hará uso de las funciones trigométricas, en especial la identidad $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ así como el hecho que $\cos 90^{\text{o}} = 0$ y $\sin 90^{\text{o}} = 1$.

Ejemplo 2.13. *Veamos que a partir de la proposición P:"$\cos 45^o = 1$" la cual es falsa es posible concluir una proposición verdadera como Q:"$\cos 45^o = \sin 45^o$".*

1. $\cos 45^o = 1$	*. . . Premisa*
2. $\cos(90^o - 45^o) = 1$	*. . . En 1 se hace* $45^o = 90^o - 45^o$
3. $\cos 90^o \cos 45^o + \sin 90^o \sin 45^o = 1$	*. . . Identidad trigonométrica en 2*
4. $\sin 45^o = 1$	*. . . Propiedades trigonométricas en 3*
5. $\cos 45^o = \sin 45^o$	*. . . Transitividad entre 1 y 4*

Es por esto que el condicional $P \rightarrow Q$ equivalente a "Si $\cos 45^o = 1$ entonces $\cos 45^o = \sin 45^o$" es verdadero.

El **bicondicional** es la proposición compuesta que resulta al unir dos proposiciones con el conectivo "si y sólo si" que se simboliza $P \leftrightarrow Q$ y se lee "P si y solo si Q". La expresión "si y sólo si" puede abreviarse como "sii". Cuando un bicondicional es lógicamente verdadero, se dice que existe una equivalencia y la expresión se lee como "P equivale a Q" se puede simbolizar particularmente como $P \Leftrightarrow Q$.

Ejemplo 2.14. *La proposición "524 es divisible por 6 si y solo si 524 es divisible por 2" representa un bicondicional el cual es falso, puesto que se requiere también que 524 sea divisible por 3 para ser divisible por 6. Mientras que el bicondicional "un triángulo es isósceles si y solo si dos de sus ángulos son iguales" es verdadero, ya que si dos de sus ángulos son iguales, los lados que se le oponen también lo serán y por tanto es isósceles.*

En términos de condicionales, el bicondicional es aquella proposición para la cual se cumple la condición necesaria y suficiente. La tabla de verdad de esta proposición compuesta es

P	$\leftrightarrow$	Q
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**F**	V
F	**V**	F

Es decir, para que el bicondicional $P \leftrightarrow Q$ sea verdadero requiere que tanto P como Q tengan el mismo valor de verdad. Los bicondicionales sirven para caracterizar las propiedades que cumplen los objetos matemáticos, así para que un cuadrilátero sea un cuadrado se requiere que tenga sus lados y ángulos de igual medida, se escribe "Un cuadrilátero es un cuadrado sii sus lados y ángulos tienen igual medida" esta proposición caracteriza al conjunto de los cuadrados. En el caso de la teoría de números, la proposición "Un número es divisible por 5 sii termina en 0 o en 5" es la caracterización para los múltiplos de cinco también conocido como el criterio de divisibilidad del 5. Toda definición utiliza el conector "si y sólo si", de allí que se pueda presentar en los dos sentidos: de izquierda a derecha y de derecha a izquierda.

Con los cuatro conectores $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ se trabajará en el resto de las notas, no diciendo así que son los únicos conectores existentes. En la siguiente tabla se resume lo dicho hasta este punto.

Proposición	*Representación*	*Conector*	*Representación*	*Se lee*
Disjunción	$P \vee Q$	o	$\vee$	P o Q
Conjunción	$P \wedge Q$	y	$\wedge$	P y Q
Condicional	$P \rightarrow Q$	si ... entonces	$\rightarrow$	Si P entonces Q
Bicondicional	$P \leftrightarrow Q$	si y sólo si	$\leftrightarrow$	P si y sólo si Q

2.1.2. Tautologías, Indeterminaciones y Contradicciones

Si al construir la tabla de verdad de una proposición compuesta, todos los posibles valores de verdad son verdaderos entonces la proposición compuesta se llama una **tautología** (etimológicamente quiere decir "la misma expresión"). En el caso en que todos los valores de verdad sean falsos, se dice que la proposición es una **contradicción** y una **indeterminación** sino se presentan los casos anteriores, es decir, si por lo menos un valor de verdad es diferentes a los demás.

Ejemplo 2.15. *Consideremos la proposición compuesta* $P \wedge Q \leftrightarrow \sim (\sim P \vee \sim Q)$*, ya que está constituida por dos proposiciones* P *y* Q*, entonces existen en total* 4 *posibilidades lógica distribuidas para* P *como* $VVFF$*, para* Q *como* $VFVF$*, como además se presenta la negación de* P *y de* Q *entonces los valores de verdad se cambian por* $FFVV$ *para* $\sim P$ *y* $FVFV$ *para* $\sim Q$*. Los datos conocidos se ubican en una tabla como sigue*

P	$\wedge$	Q	$\leftrightarrow$	$\sim$	$\sim P$	$\vee$	$\sim Q$
V		V			F		F
V		F			F		V
F		V			V		F
F		F			V		V

Ahora bien, quedan cuatro columnas de la tabla por completar, se procede, al igual que en operaciones como $[2-(4+5)+(12-8)]$, *de adentro hacia afuera, de los paréntesis a los corchetes, es por ello que los conectores siguientes son* $\wedge$ *y* $\vee$ *que según la tabla de verdad de los mismos resulta*

P	$\wedge$	Q	$\leftrightarrow$	$\sim$	$\sim P$	$\vee$	$\sim Q$
V	V	V			F	F	F
V	F	F			F	V	V
F	F	V			V	V	F
F	F	F			V	V	V

De los operadores $\sim$ *y* $\leftrightarrow$ *que están faltando es necesario comenzar con* $\sim$ *puesto que es el primero que resulta después del paréntesis, dicha negación cambia los valores de verdad de la columna 7 quedando* $VFFF$ *así*

P	$\wedge$	Q	$\leftrightarrow$	$\sim$	$\sim P$	$\vee$	$\sim Q$
V	V	V		V	F	F	F
V	F	F		F	F	V	V
F	F	V		F	V	V	F
F	F	F		F	V	V	V

El último conector que resulta es el bicondicional, para ello entre los valores de verdad de las columnas 2 y 5 y según la tabla de este conector se concluye

P	$\wedge$	Q	$\leftrightarrow$	$\sim$	$\sim P$	$\vee$	$\sim Q$
V	V	V	$\boldsymbol{V}$	V	F	F	F
V	F	F	$\boldsymbol{V}$	F	F	V	V
F	F	V	$\boldsymbol{V}$	F	V	V	F
F	F	F	$\boldsymbol{V}$	F	V	V	V

Como se obtiene que todas las posibilidades lógicas (4 en total) son todas verdaderas entonces se sigue que la proposición compuesta $P \wedge Q \leftrightarrow \sim (\sim P \vee \sim Q)$ *es una tautología.*

Todas las proposiciones que sean tautologías serán teoremas dentro del sistema formal de la lógica proposicional y viceversa, es decir, todo teorema es una tautología. La proposición compuesta del ejemplo 2.15 se llama Ley D'Morgan.

Ejemplo 2.16. *En la proposición compuesta* $P\wedge \sim P$ *existe una sola proposición* P *es por ello que solo hay dos posibilidades lógicas,* VF *para* P *y* FV *para* $\sim P$ *es por ello que la tabla queda como*

P	$\wedge$	$\sim P$
V	$\boldsymbol{F}$	F
F	$\boldsymbol{F}$	V

La proposición $P\wedge \sim P$ *es una contradicción, la cual implica que una proposición y su negación no se pueden presentar de forma simultánea o que no son verdaderas simultáneamente. Caso contrario ocurre con la proposición* $P\vee \sim P$ *la cual es una tautología e implica que se presenta la proposición* P *o su negación* $\sim P$*, dicha tautología recibe el nombre de medio excluido o también dicotomía por presentarse una de las dos posibilidades.*

Ejemplo 2.17. *Para la proposición compuesta* $P \to Q$ *su recíproco está dado por* $Q \to P$*, analicemos las posibilidades lógicas de la proposición* $(P \to Q) \to (Q \to P)$*, para lo que existen cuatro posibilidades lógicas, y la tabla de verdad se presenta a continuación*

P	$\to$	Q	$\to$	Q	$\to$	P
V	V	V	$\boldsymbol{V}$	V	V	V
V	F	F	$\boldsymbol{V}$	F	V	V
F	V	V	$\boldsymbol{F}$	V	F	F
F	V	F	$\boldsymbol{V}$	F	V	F

Con base en la tabla de verdad se puede concluir entonces que la proposición compuesta $(P \to Q) \to (Q \to P)$ *es una indeterminación, la cual permite concluir que el recíproco* $Q \to P$ *del condicional* $P \to Q$ *no siempre es verdadero.*

Ejemplo 2.18. *Analicemos ahora la situación del contrarrecíproco, es decir, determinar que tipo de proposición es* $(P \to Q) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$*, como hay dos proposiciones simples implicadas* P *y* Q *entonces existen cuatro posibilidades y así*

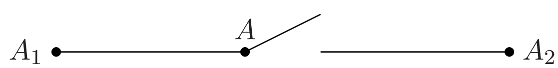
P	$\to$	Q	$\leftrightarrow$	$\sim Q$	$\to$	$\sim P$
V	V	V	$\boldsymbol{V}$	F	V	F
V	F	F	$\boldsymbol{V}$	V	F	F
F	V	V	$\boldsymbol{V}$	F	V	V
F	V	F	$\boldsymbol{V}$	V	V	V

Ya que todas las posibilidades lógicas resultantes son verdaderas entonces el bicondicional $(P \to Q) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P)$ *es una tautología lo que implica que el condicional* $P \to Q$ *y su contrarrecíproco* $\sim Q \to \sim P$ *son equivalentes.*

2.1.3. Circuitos Lógicos

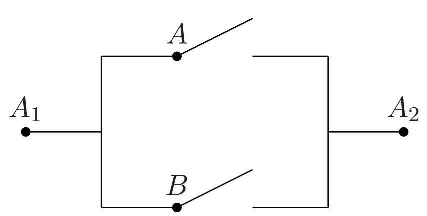
Un circuito lógico es otra manera de representar un conjunto de proposiciones y operaciones lógicas, haciendo una correspondencia con los circuitos electrónicos. Según Hugo Guarín ([9], pag. 70), un circuito o red de conmutación es una combinación de cables e interruptores que conectan dos terminales o bornes A_1 y A_2. Cada interruptor puede estar, o abierto, o cerrado; un interruptor abierto impide que pase la corriente u otro tipo de información presente como puede ser el flujo de agua, la movilidad en un sistema de carreteras, mientras que un interruptor cerrado permite el flujo de la misma.

Ahora veamos en qué casos se da o no el flujo de la corriente, según estén los interruptores en serie o en paralelo. El tipo más simple de circuito es aquel en el cual las terminales A_1 y A_2 se encuentran unidas por un solo cable que contiene un interruptor A.

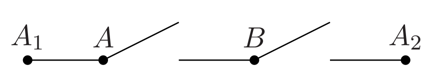


Si A está cerrado pasa corriente entre los extremos A_1 y A_2, si A está abierto como se ilustra en el gráfico anterior entonces no hay transporte de corriente entre estas dos terminales. En busca de hacer una interpretación desde el punto de vista de la lógica proposicional se puede suponer que si P es la proposición "El interruptor A está cerrado" entonces P tiene el valor de verdad verdadero **V**, mientras que $\sim P$ es la proposición "El interruptor A está abierto" y tiene valor de verdad falso **F**. En los sistemas de información se les asigna 1 para el caso de estar cerrado y 0 si está abierto dando cabida al sistema binario que sirve en el almacenamiento y procesamiento de la información.

Consideremos ahora la situación en que se tengan las dos terminales A_1 y A_2 y dos interruptores entre éstos llámesen A y B, esta situación se puede plantear de dos formas como se presenta en el siguiente gráfico.



Circuito en Paralelo



Circuito en Serie

Los dos tipos de circuitos resultantes se denominan en paralelo (por la correspondencia geométrica) y en serie. Para un circuito en paralelo, si A y B están cerrados (verdaderas ambas), la corriente fluye entre A_1 y A_2, si A está cerrado (V) y B está abierto (F) la corriente se dirige por el camino $A_1 - A - A_2$ pero hay transporte, por lo que el valor de verdad asociado es verdadero (V), igual situación ocurre si A está abierto y B cerrado cuyo camino es $A_1 - B - A_2$ y en el caso de que ambos estén abiertos (F) no hay paso de la corriente y así el valor de verdad es falso. Como se dijo anteriormente A es verdadero si está cerrado y falso en caso contrario entonces la información se puede tabular como sigue

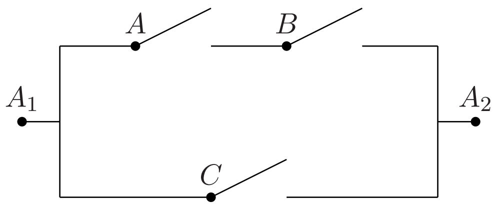
A	B	*Paso de Corriente*	*Camino*
V	V	V	$A_1 - A - A_2$ o $A_1 - B - A_2$
V	F	V	$A_1 - A - A_2$
F	V	V	$A_1 - B - A_2$
F	F	F	No hay corriente

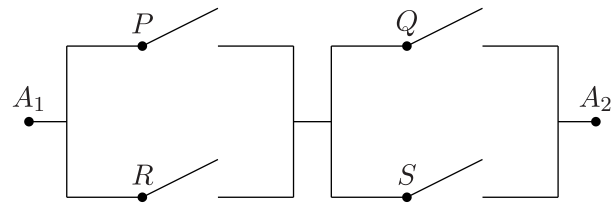
Nótese la similitud entre los valores obtenidos en la columna tres de la tabla anterior con los valores de verdad de la disyunción entre dos proposiciones, debido a esto un circuito en paralelo se le asocia el conector $\vee$ y se escribe $A \vee B$, lo cual indica que los interruptores A y B que están en paralelo están en disjunción desde el sentido de la lógica proposicional.

Para el caso del circuito en serie el único camino posible para que haya corriente entre los dos puntos terminales es $A_1 - A - B - A_2$ es por ello que la única forma en que haya flujo de corriente es que ambos interruptores A y B estén cerrados, es decir, ambos tener un valor de verdad verdadero. Al tabular la información resulta

A	B	*Paso de Corriente*	*Camino*
V	V	V	$A_1 - A - B - A_2$
V	F	F	No hay corriente
F	V	F	No hay corriente
F	F	F	No hay corriente

Es por ello que los circuitos en serie se asemejan a un conjunción entre dos proposiciones y se escribe $A \wedge B$. Otro tipo de circuito se denomina mixto que es aquel donde se combinan circuitos en paralelo y en serie, es decir, disyunciones y conjunciones. A continuación se presentan dos casos de circuitos mixtos.



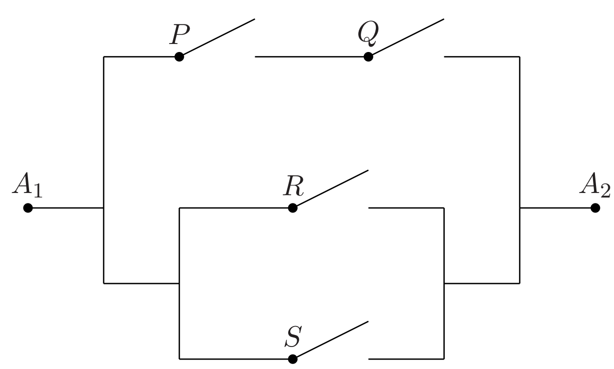


Para el circuito de la izquierda se sigue que los interruptores A y B están en serie, por lo que el conector asociado a dicha situación es $\wedge$ y se escribe $A \wedge B$. Ahora bien, el resultante de esta proposición está en paralelo con el interruptor C es por ello que se presenta una disyunción entre la proposición $A \wedge B$ y C, lo cual se escribe como $(A \wedge B) \vee C$. Para el circuito de la derecha se sigue que hay dos circuitos en paralelo lo que se escribe como $P \vee R$ y $Q \vee S$; los resultantes de estos dos circuitos quedan en serie es por ello que existe una conjunción entre las proposiciones $P \vee R$ y $Q \vee S$ y se expresa con la proposición $(P \vee R) \wedge (Q \vee S)$.

En los circuitos mixtos se puede determinar cual es el menor número de interruptores que deben estar cerrados para que fluya la corriente entre los puntos A_1 y A_2; para el caso del circuito mixto de la izquierda solo se necesita que este cerrado C y el camino a seguir es $A_1 - C - A_2$ y para el de la derecha se necesita que estén cerrados como mínimo R y S (también P y Q o R y Q o P y S), donde el camino a seguir es $A_1 - R - S - A_2$.

Si por el contrario se quiere determinar cual es la menor cantidad de interruptores que deben estar abiertos para que no haya flujo de corriente se tiene para el circuito de la izquierda que deben ser A y C o B y C. Para el caso del circuito de la derecha se deben dejar abiertos también dos que pueden ser P y R o Q y S, nótese que no es posible dejar abiertos R y Q ya que la corriente puede seguir el camino $A_1 - P - S - A_2$.

Ejemplo 2.19. *Dada la proposición $(P \wedge Q) \vee (R \vee S)$ se va a construir el circuito lógico que representa a tal proposición, para ello se tiene que el conector principal es $\vee$, por lo que se tiene un circuito en paralelo, donde $P \wedge Q$ se ubica en la parte superior y $R \vee S$ en la parte inferior. Como en la parte superior se ubica la conjunción $P \wedge Q$ entonces resulta otro circuito en este caso en serie, mientras que en la parte inferior resulta otro circuito en paralelo producto de $R \vee S$, la situación se ilustra a continuación*



Para este circuito, la mínima cantidad de interruptores que deben estar cerrados para que fluya la corriente es de 1, que pueden ser R o S y en cuyo caso los caminos posibles son $A_1 - R - A_2$ o $A_1 - S - A_2$. Para que no haya corriente entre las terminales A_1 y A_2 se requieren dejar abiertos tres interruptores P, R y S o Q, R y S.

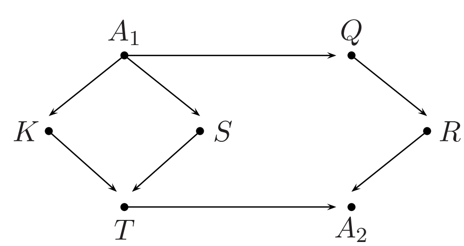
Con base en las situaciones anteriores existe una correspondencia entre los conectores y las proposiciones compuestas (solo conjunciones y disjunciones), lo que permite pasar de un circuito a una proposición o de una proposición a un circuito como se ilustró en las situaciones anteriores, tenga en cuenta los siguientes aspectos cuando se pretende hacer dichas correspondencias.

1. Para convertir un circuito mixto en forma proposicional, se deben tener en cuenta las siguientes indicaciones: Iniciar por la parte superior y que esté más hacia la izquierda del circuito; después de terminar una línea o un rectángulo, encerrar en un signo de agrupación (empezando por paréntesis, luego corchetes y por último llaves) hasta lograr describir todo el circuito.

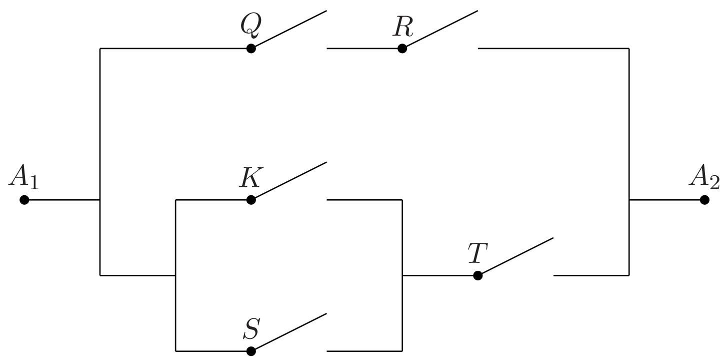
2. Para convertir un conjunto de proposiciones y operaciones lógicas en circuito debe iniciar siempre por las partes más internas; generalmente, primero paréntesis, luego corchetes y por último las llaves o el enunciado completo.

Un **diagrama de flujo** es un esquema donde se representan las posibles direcciones en las que se puede mover la corriente, dichas direcciones se representan por medio de vectores o segmentos dirigidos. En los ejemplos 2.20 y 2.21 se plantea la situación de como pasar de un diagrama de flujos a un circuito y viceversa. Con esto se presenta una triple correspondencia entre las proposiciones, los circuitos y los diagramas de flujos. Veamos

Ejemplo 2.20. *Consideremos el siguiente diagrama de flujos, donde el sentido de las flechas indica el posible camino que puede seguir la corriente*

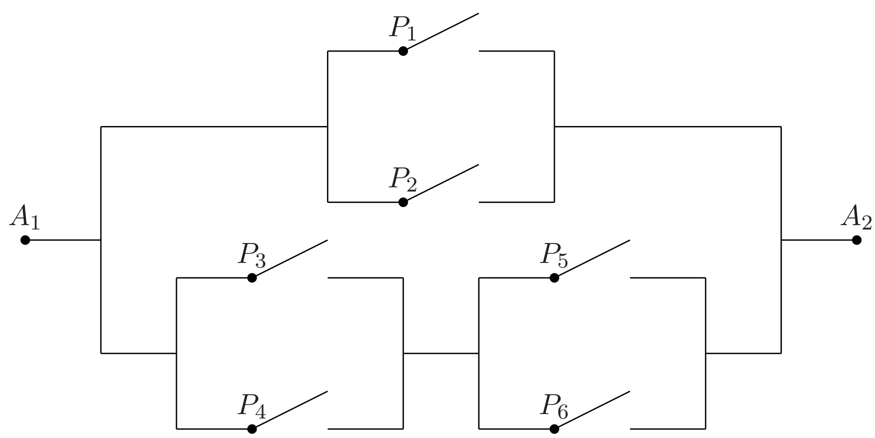


Para que fluya corriente entre los puntos A_1 y A_2 existen tres caminos, el primero es $A_1 - Q - R - A_2$ ´de acuerdo con el grafo dado si falla alguna de las conexiones Q y R no hay transporte entre A_1 y A_2 es por ello que los interruptores Q y R están en serie. Los otros dos caminos posible son $A_1 - S - T - A_2$ y $A_1 - K - T - A_2$ en este caso se puede concluir que K y S se encuentran en paralelo ya que se pueden seguir dos caminos posibles, sin embargo T estará en serie con $K \vee S$ puesto que si T falla entonces no hay flujo de corriente. Con base en esto se puede construir un circuito mixto que dé cuenta de la situación

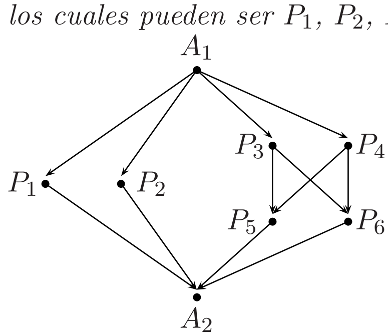


Asociado al circuito anterior está la proposición compuesta $(Q \wedge R) \vee [(K \vee S) \wedge T]$. *Solo se requieren dos interruptores cerrados para que fluya la corriente (por ejemplo* K *y* T*) e igual número para que no haya flujo entre las terminales* A_1 *y* A_2*, como es el caso de* Q *y* T.

Ejemplo 2.21. *Se tiene ahora el circuito mixto*



El cual tiene asociado la proposición compuesta $(P_1 \vee P_2) \vee [(P_3 \vee P_4) \wedge (P_5 \vee P_6)]$. *Para diseñar el diagrama de flujos, nótese que existen seis caminos posibles para transportar corriente desde* A_1 *a* A_2*, éstos son* $A_1 - P_1 - A_2$, $A_1 - P_2 - A_2$, $A_1 - P_3 - P_5 - A_2$, $A_1 - P_3 - P_6 - A_2$, $A_1 - P_4 - P_5 - A_2$ *y* $A_1 - P_4 - P_6 - A_2$*, los que permiten diseñar el siguiente diagrama de flujos. En tal situación solo se requiere de un interruptor que puede ser* P_1 *o* P_2 *para que haya corriente entre* A_1 *y* A_2 *y se requieren dejar cuatro circuitos abiertos para impedir el flujo, los cuales pueden ser* P_1, P_2, P_3 *y* P_4 *o* P_1, P_2, P_5 *y* P_6.



2.2. Ejercicios

1. Hacer el siguiente pareamiento

a. Conector para un circuito en paralelo	__ $\sim (P \vee Q)$
b. P es necesario para Q	__ F
c. Consecuente: Antecedente falso consecuente verdadero	__ Conjunción
d. Contrarrecíproco de $P \to Q$	__ P en $P \to Q$
e. Negación de una disjunción entre proposiciones	__ Q en $P \to Q$
f. Antecedente	__ $\sim P \vee \sim Q$
f. Contrario de $P \to Q$	__ Disjunción
h. Disyunción de la negación entre proposiciones	__ $Q \to P$
i. Consecuente	__ $\sim P \to \sim Q$
j. Recíproco de $P \to Q$	__ V
k. Condicional: Antecedente verdadero consecuente falso	__ $P \to Q$
l. Conector para un circuito en serie	__ $\sim Q \to \sim P$

2. Para las proposiciones P: " Tres es un número impar" y Q: " Seis es divisible por tres". Exprese en el lenguaje natural los siguientes enunciados simbólicos

a) $P \vee \sim Q$	b) $\sim P \wedge Q$	c) $Q \to P$
d) $\sim (\sim P)$	e) $P \leftrightarrow Q$	f) $\sim Q \to \sim P$

3. Sean P:"2 es número primo" y Q:"8 es múltiplo de cinco", dos proposiciones simples. Represente en lenguaje natural cada una de las siguientes proposiciones compuestas y determine su valor de verdad

a) $P \vee Q$	b) $P \wedge Q$	c) $Q \to P$
d) $P \vee \sim Q$	e) $Q \leftrightarrow \sim P$	f) $\sim P \to Q$

4. Escriba en el lenguaje de la lógica proposicional cada una de las proposiciones que se presentan a continuación las cuales están dadas en lenguaje natural

   a) Si x es menor que tres entonces es menor que cuatro.

   b) Si un número no es cero entonces es positivo o es negativo.

   c) No ocurre que, ocho es primo o seis es un número par.

   d) Es necesario que un cuadrilátero sea rombo para ser cuadrado.

   e) Los números divisible por seis son pares.

5. Suponga que P, Q, R y S son cuatro proposiciones que tienen por valor de verdad: Falso, verdadero, verdadero y falso, respectivamente. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones compuestas

   a) $(\sim P \vee Q) \rightarrow \sim R$ b) $P \leftrightarrow (Q \vee S)$ c) $(P \vee S) \rightarrow Q$
   d) $\sim (P \vee Q) \wedge (Q \rightarrow R)$ e) $P \wedge ((Q \rightarrow R) \vee S)$ f) $((P \wedge Q) \rightarrow R) \vee S$

6. A partir de las proposiciones simples P :"$m.c.d(7, 28) = 7$", Q:"$\cos 45^{\circ} = 1$" y R: "8 es número compuesto" halle el valor de verdad de las proposiciones simples P, Q y R así como de las proposiciones compuestas

   a) $(P \vee Q) \wedge R$ b) $(P \rightarrow Q) \wedge \sim (R \vee \sim R)$
   c) $[P \wedge (R \longleftrightarrow \sim Q)] \rightarrow \sim P$ d) $\{[(\sim R \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \vee (P \wedge \sim R)\} \rightarrow (Q \rightarrow \sim R)$

7. Las proposiciones compuestas que se presentan a continuación escribirlas en el lenguaje de la lógica proposicional. Determinar el valor de las mismas, así como de la negación

   a) Es verdad que $3 + 3 \neq 6$ y $4 + 5 = 9$
   b) Si $3 + 5 = 8$, entonces no es verdad que $3 + 4 = 7$ y $4 + 4 = 8$
   c) No es verdad que $2 + 7 = 9$ si, y solo si $2 + 1 = 5$ implica $5 + 5 = 8$

8. Para las siguientes implicaciones escriba su recíproco, su contrarrecíproco y su contrario.

   a) Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.
   b) Si hay un eclipse entonces se oscurece el día.
   c) Si $m.c.m(x, 5) = 10$ entonces $x = 10$.
   d) Si un mes del año tiene 28 días entonces el mes es febrero.
   e) Si un triángulo tiene dos ángulos iguales, entonces es isósceles.
   f) Si una figura plana es un cuadrado entonces es un rectángulo.
   g) Si un triángulo rectángulo es isósceles entonces los ángulos agudos son de 45°.
   h) Si dos rectas distintas son paralelas, entonces su intersección es el conjunto vacío.

9. Determine el valor de verdad del recíproco, contrarrecíproco y contrario del literal anterior así como de la implicación dada.

10. Clasifique las siguiente implicaciones en necesarias, suficientes, necesarias y suficientes o ninguna de las dos

    a) Ser número primo para ser impar.

b) Ser triángulo isósceles para ser equilátero.
c) Ser cuadrado para ser rombo.
d) Terminar en cinco para ser divisible por cinco.
e) Ser divisible por 6 para que un número sea múltiplo de 3.
f) Que n sea un número positivo para que n^2 sea positivo
g) Tener los lados congruentes para ser polígono regular.
h) Ser triángulo equilátero para ser triángulo equiángulo.
i) Ser entero positivo para ser natural.

11. Escribir las caracterizaciones (el conector es un bicondicional) para los siguientes objetos matemáticos

a) Un número divisible por 10.
b) Un cuadrilátero que es rombo.
c) Un número primo.
d) Un polígono regular.
e) Un número divisible por 7.
f) Las diagonales de un cuadrilátero de n lados con $n \geq 3$.

12. Escribe la negación de cada uno de los siguientes enunciados de la manera más simple posible

a) Si no caen los precios de las acciones, aumenta la demanda.
b) Ni llueve ni hace calor.
c) El tiene fiebre u otitis.
d) Usted aprueba el año si y solamente si estudia con dedicación.
e) Ambos, el 25 y el 49 son cuadrados perfectos.
f) Si cuatro es divisible por dos, entonces tanto dieciséis como doce son divisibles por dos.

13. Si las proposiciones P, Q, R son verdaderas; y las proposiciones T, W y S son falsas, complete el siguiente cuadrado mágico, de tal manera que las proposiciones compuestas, resultantes, sean verdaderas (tanto las de las columnas, como las diagonales; y leídas en cualquier dirección), en la fila del medio deben ir los conectores y se deben utilizar las seis proposiciones simples.

	T	
$\leftrightarrow$		
		S

14. Sabiendo que las proposiciones P_4 y P_5 son falsas, determine el valor de verdad de las demás proposiciones para que las proposiciones compuestas obtenidas por columnas (de arriba a abajo) y en diagonal tengan valores de verdad verdaderos

P_1	P_2	P_3	P_4
$\rightarrow$	$\vee$	$\leftrightarrow$	$\rightarrow$
P_5	P_6	P_7	P_8

15. Sean P, Q y R proposiciones tales que P es verdadera y Q es falsa. ¿Qué puede afirmarse del valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones compuestas?

a) $Q \rightarrow (P \rightarrow ((R \wedge Q))$ b) $P \rightarrow (Q \vee R)$

16. Sean P, Q, R proposiciones

   a) Si $R \vee P$, $Q \wedge P$ son falsas y P es falsa ¿Qué puede afirmarse del valor de verdad de Q y R?

   b) Si $(Q \rightarrow R) \rightarrow [(P \wedge Q) \vee R]$ es falsas ¿Qué se puede afirmar del valor de verdad de P, Q y R?

17. Se sabe que la proposición compuesta $[(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \rightarrow P$ es falsa y que P es una proposición falsa. ¿Cómo debe ser el valor de verdad de la proposición Q?

18. Para cada una de las siguientes proposiciones compuestas determine si es una tautología, una contradicción o una indeterminación

a) $(P \wedge Q) \wedge (\sim P \vee \sim Q)$ b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim P \vee Q)$ c) $[(P \rightarrow Q) \wedge \sim Q] \rightarrow \sim P$
d) $P \vee Q \rightarrow \sim (Q \vee P)$ e) $[(P \rightarrow R) \wedge R] \rightarrow \sim R$ f) $\sim [(\sim P \vee \sim P) \rightarrow \sim P]$

19. Construya dos tautologías, dos indeterminadas y dos contradicciones.

20. Resuelva los siguientes problemas:

   a) Tía Amelia acompañó a sus tres sobrinos en un viaje a la Costa. Después, cada uno contó lo siguiente:

      i. Hugo: "Hemos conocido a Barranquilla, pero no a Cartagena; también hemos visitado a Santa Marta."

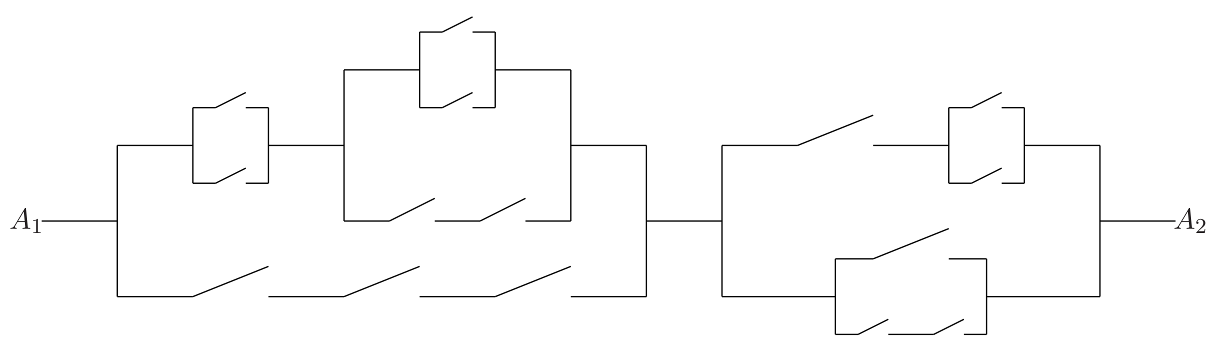
      ii. Paco: "Hemos conocido a Barranquilla y a Cartagena. Pero no hemos visitado a Santa Marta ni a Sincelejo."

iii. Luis: “No hemos conocido a Barranquilla pero hemos visitado a Santa Marta.”

Si se sabe que cada uno dijo una y sólo una mentira, ¿A dónde fueron realmente con tía Amelia estas simpáticas criaturas?

b) Juan y Pedro mienten de vez en cuando. Juan dice a Pedro: “Cuando yo no miento, tú no mientes” y Pedro le responde “Y cuando yo miento, tú mientes”. ¿Puede ser que en esta conversación uno mienta y otro diga la verdad? Justifique su respuesta.

21. Para el siguiente circuito determine la proposición compuesta que la describe e indique cual es el menor camino que la corriente debe seguir entre los puntos A_1 y A_2, es decir, para que pase por la menor cantidad de interruptores



22. Con base en las proposiciones que se presentan a continuación, construya el circuito equivalente así como el diagrama de flujos

a) $[(P_1 \wedge P_2) \wedge P_3] \vee [P_4 \wedge (P_5 \vee P_6)]$ b) $P_1 \wedge [(P_2 \wedge P_3) \vee (P_4 \wedge P_5)] \wedge P_6$

c) $[(P_1 \vee P_2) \vee (P_3 \wedge P_4)] \wedge P_5$ d) $[(P_1 \vee P_2) \vee (P_3 \vee P_4)] \wedge [(P_5 \wedge P_6) \vee P_7] \wedge P_8$

23. Construya los circuitos equivalente a las siguientes proposiciones compuestas. Halle la menor cantidad de interruptores abiertos para que no fluya la corriente y la menor cantidad de interruptores cerrados para que se haya flujo.

a) $\{(P_1 \vee P_2) \wedge [(P_3 \vee P_4) \vee (P_5 \vee P_6)]\} \vee \{P_7 \wedge [(P_8 \vee P_9) \vee (P_{10} \wedge P_{11})]\}$

b) $(P_1 \vee P_2) \wedge \{[(P_3 \vee P_4) \wedge (P_5 \vee P_6)] \wedge P_7\} \wedge (P_8 \vee P_9) \wedge [(P_{10} \vee P_{11}) \vee (P_{12} \vee P_{13})]$

24. Construya un material didáctico llamado bloques lógicos con la asesoría de su profesor(a) y realice la actividad que se indica en el anexo; ésta le ayudará a comprender algunos de los conceptos vistos hasta el momento y como introducción a algunas reglas que se analizan en el siguiente apartado.

2.3. Sistema Formal

Con base en las nociones básicas que se analizaron en la sección anterior: Proposiciones, conectores, valores de verdad, tablas de verdad, tautologías, contradicciones e indeterminaciones, se hará ahora una introducción al campo de la formalización desde la lógica, iniciando para ello con la construcción de un lenguaje formal para la lógica proposicional; luego, determinando un mecanismo deductivo para este lenguaje y así obtener un "sistema formal para la lógica proposicional"; lo propio se hará con la lógica cuantificacional o lógica de enunciados. La construcción se hará siguiendo una vía similar a la propuesta por Bourbaki (ver [5]) y Restrepo (ver [14])

2.3.1. Alfabeto

1. El conjunto $\mathcal{P}$ contiene las proposiciones simples, las cuales se denotan con letras mayúsculas latinas, lo que se puede escribir como $\mathcal{P} = \{P, Q, R, S, T, \ldots\}$, en forma de subíndices se escribe $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$
2. El conjunto $\mathcal{O}$ denota los operadores a utilizar, el cual se escribe como $\mathcal{O} = \{\vee, \sim\}$
3. Los signos auxiliares están constituidos por los paréntesis que abren y cierran, se escribe $\mathcal{A} = \{(,)\}$

2.3.2. Reglas de Formación

1. Todo elemento de $\mathcal{P}$ es una fórmula bien formada (f.b.f.).
2. Si P es una fórmula bien formada entonces $\sim P$ es una fórmula bien formada también.
3. Si P, Q son f.b.f. entonces $P \vee Q$ es una f.b.f.
4. Solo serán f.b.f. las cadenas que se generan al aplicar las reglas 1, 2 y 3.

En cuanto al alfabeto hay que decir que el conjunto $\mathcal{O}$ no es de conectores, ya que la función de la negación $\sim$ es cambiar el valor de verdad de las proposiciones simples. Algunas f.b.f que se deducen a partir de las reglas de formación son $\sim P$, $\sim P \vee Q$, $\sim P \vee \sim Q$, $\sim (\sim P \vee \sim Q)$ donde P, Q son proposiciones $(P, Q \in \mathcal{P})$. Sin embargo $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$ no son f.b.f ya que los conectores $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ no hace parte del alfabeto, es por ello que se presentan las siguientes definiciones para que así la conjunción, el condicional y el bicondicional tengan sentido en el sistema.

2.3.3. Definiciones

Sean P, Q fórmulas bien formadas, a continuación se definen la conjunción, el condicional y el bicondicional en términos del conjunto $\mathcal{O}$ de operadores.

Definición 2.1. ***Conjunción*** *Si P, Q son proposiciones entonces la conjunción $P \wedge Q$ equivale a $\sim (\sim P \vee \sim Q)$.*

Definición 2.2. ***Condicional*** *Si P, Q son proposiciones entonces $P \to Q$ equivale a $\sim P \vee Q$.*

Definición 2.3. ***Bicondicional*** *Si P, Q son proposiciones entonces $P \leftrightarrow Q$ equivale a $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$*

Así la proposición $P \wedge Q$ es una f.b.f ya que $\sim (\sim P \vee \sim Q)$ es una f.b.f. Con base en estas definiciones se sigue que $\sim P \to Q$ es equivalente a $\sim (\sim P) \vee Q$, mientras que $\sim P \wedge \sim Q$ equivale a $\sim (\sim (\sim P) \vee \sim (\sim Q))$.

2.3.4. Mecanismo Deductivo

2.3.4.1. Axiomas

Los axiomas que se definen a continuación son el punto de partida para la construcción de los teoremas de la lógica proposicional, los cuales se asumen como enunciados verdaderos, los que a su vez poseen la estructura de tautología. La palabra idempotencia hace alusión a que al realizar varias veces una operación sobre un mismo elemento se obtiene el mismo elemento; mientras que la conmutatividad indica que que el resultado es independiente del orden en que se realicen las operaciones.

Axioma 2.1. ***Idempotencia*** *Sea P una proposición entonces $P \vee P \to P$ es una proposición verdadera.*

Axioma 2.2. ***Adjunción*** *Sean P, Q proposiciones entonces $P \to P \vee Q$ es una proposición verdadera.*

Axioma 2.3. ***Conmutativa*** *Sean P, Q proposiciones entonces $P \vee Q \to Q \vee P$ es una proposición verdadera.*

Axioma 2.4. ***Adición a la implicación*** *Sean P, Q proposiciones entonces*

$$(P \to Q) \to (R \vee P \to R \vee Q)$$

es una proposición verdadera.

El axioma de idempotencia indica que al tener una disyunción de una proposición P con sí misma entonces se puede concluir solo la proposición simple P, por lo que la proposición $\sim P \vee \sim P \rightarrow \sim P$ es verdadera a raíz de este axioma, si se tiene la disjunción $\sim (\sim P) \vee \sim (\sim P)$ ¿Qué se puede concluir?. El axioma de adjunción indica que dada una proposición P entonces se le puede adjuntar o anexar otra proposición Q siempre y cuando se haya uso del conector $\vee$ y que esta se haga al lado derecho, inclusive se puede adjuntar la misma proposición P o su negación, es decir, $P \rightarrow P \vee P$ o $P \rightarrow P \vee \sim P$.

El axioma de conmutatividad respecto de la disjunción implica que el orden de la proposición $P \vee Q$ puede cambiar y no alterar la estructura lógica de la proposición $P \vee Q$, así $\sim P \vee Q \rightarrow Q \sim\sim P$. El axioma de adición a la implicación indica que al tener un condicional $P \rightarrow Q$ se puede adjuntar al antecedente y al consecuente otra proposición R al lado izquierdo de cada uno, dicha proposición R puede ser incluso P o Q o sus negaciones, es por esto que $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((\sim P \vee P) \rightarrow (\sim P \vee Q)))$ que en términos de la definición de condicional se escribe $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow (P \rightarrow Q))$.

2.3.4.2. Reglas de Inferencia

En la tercer regla, la expresión Modus ponendo ponens es una locución latina que significa "el modo de afirma afirmando".

1. Todo axioma es verdadero y puede figurar en cualquier paso de una deducción o demostración.
2. Toda proposición obtenida por la aplicación de un axioma es verdadera y puede figurar en cualquier paso de una deducción.
3. **Modus Ponendo Ponens** Si $P \rightarrow Q$ es una proposición verdadera y P es una proposición verdadera, entonces Q es una proposición verdadera. Esquemáticamente, esta regla se puede escribir así

$$\begin{array}{lcl} P & \rightarrow & Q \\ P & & \\ \hline Q & & \end{array}$$

4. **Sustitución** Si $P \leftrightarrow Q$ entonces se puede sustituir P por Q o Q por P en cualquier parte de una deducción o demostración.

2.3.5. Teoremas

Para deducir cada uno de los teoremas de la teoría que se va ha construir no existe un algoritmo, una estrategia o camino único, puesto que la deducción es un acto creativo donde se ponen en juego todas las herramientas que se tienen y la imaginación misma. Esas herramientas de las que se está hablando son las definiciones, axiomas, reglas de inferencia y los teoremas demostrados con anterioridad.

Para construir una deducción de un teorema se puede hacer en **forma de texto**, también llamada **prosa** o por medio de una estrategia llamada **afirmación - Razón**. En el primer caso, la demostración se escribe como una narración en la que a través de las palabras se va hilando el conjunto de argumentos que llevarán a probar la verdad de la proposición a demostrar. En el segundo caso, se hace una lista de las deducciones y se escribe en frente la justificación o razón de lo que se va efectuando, a través de la utilización de los axiomas, definiciones, reglas de inferencia o teoremas ya demostrados. Cabe resaltar que los teoremas son útiles en cuanto al contenido del mismo, por su estructura, y no ligado al uso de las letras P, Q, R, S.

Cada una de las definiciones, reglas de inferencias, axiomas o teoremas que se utilizan dentro de un sistema deben ser proposiciones que generen tautologías, se hace a continuación la verificación para la definición de condicional, la cual se escribe en forma de bicondicional como $(P \to Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$, como son dos proposiciones entonces hay cuatro posibilidades lógicas y de allí que

P	$\to$	Q	$\leftrightarrow$	$\sim P$	$\vee$	Q
V	V	V	**V**	F	V	V
V	F	F	**V**	F	F	F
F	V	V	**V**	V	V	V
F	V	F	**V**	V	V	F

Lo que genera una tautología. Se presentan a continuación 17 teoremas con su respectiva demostración (alternando entre prosa y afirmación razón) que serán de utilidad en el estudio de las inferencias y que reviste una importancia histórica y conceptual en otras ramas de las matemáticas, no diciendo con esto que sean los únicos teoremas existentes sino los de mayor relevancia para el trabajo. Cada uno tiene un nombre que será utilizado para la justificación de los teoremas posteriores.

Teorema 2.1. ***Transitividad o Silogismo*** *Si $P \to Q$ y $Q \to R$ son proposiciones verdaderas entonces $P \to R$ es una proposición verdadera. En forma esquemática se escribe*

$$\begin{array}{ccc} P & \to & Q \\ Q & \to & R \\ \hline P & \to & R \end{array}$$

Demostración [Afirmación-Razón]

1. $P \rightarrow Q$ ... Hipótesis
2. $Q \rightarrow R$ ... Hipótesis
3. $\sim P \vee Q$ ... Definición de condicional (definición 2.2) en 1
4. $(Q \rightarrow R) \rightarrow (\sim P \vee Q \rightarrow \sim P \vee R)$ ... Adición a la implicación (axioma 2.4) en 2
5. $\sim P \vee Q \rightarrow \sim P \vee R$ ... Modus ponendo ponens entre 2 y 4
6. $\sim P \vee R$ ... Modus ponendo ponens entre 3 y 5
7. $P \rightarrow R$ ... Definición de condicional en 6

Como se mencionó previamente, cada uno de los teoremas de la lógica proposicional son proposiciones tautológicas, comprobemos que el teorema de transitividad o silogismo induce una tautología, dicho teorema se escribe como $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$, donde están implicadas tres proposiciones y por tanto 8 posibilidades lógicas, resultando

P	$\rightarrow$	Q	$\wedge$	Q	$\rightarrow$	R	$\rightarrow$	P	$\rightarrow$	R
V	V	V	V	V	V	V	**V**	V	V	V
V	V	V	F	V	F	F	**V**	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V	**V**	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	**V**	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	**V**	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	**V**	F	V	F
F	V	F	V	F	V	V	**V**	F	V	V
F	V	F	V	F	V	F	**V**	F	V	F

Con lo que se concluye que el teorema de transitividad es una tautología. La propiedad transitiva no es exclusiva del contexto de las proposiciones, desde la geometría euclidiana sabemos que si dos rectas p y q ($p \parallel q$) son paralelas y q es también paralela a otra recta r ($q \parallel r$) entonces p y r son paralelas también ($p \parallel r$) propiedad que ilustra una transitividad respecto del paralelismo. Las relaciones de semejanza y congruencia de polígonos son otros ejemplos de relaciones transitivas en geometría. A continuación se demuestra la propiedad del medio excluido formalizada por Aristóteles (en latín "principium tertium exclusum")

Teorema 2.2. ***Medio Excluido*** *Si P es una proposición entonces*

1. *$P \rightarrow P$ es una proposición verdadera.*
2. *$\sim P \vee P$ es una proposición verdadera.*
3. *$P \vee \sim P$ es una proposición verdadera.*

Demostración [Prosa]

Debido a que P es una proposición entonces por el axioma de adjunción $P \rightarrow P \vee P$ (1) es una proposición verdadera. Ahora, por el axioma de idempotencia resulta el condicional $P \vee P \rightarrow P$ (2); haciendo uso del teorema de transitividad 2.1 entre las implicaciones (1) y (2) se obtiene que $P \rightarrow P$ es una proposición verdadera y así el primer literal queda demostrado. Ya que está concluida la veracidad de $P \rightarrow P$, se hace uso de la definición de condicional 2.2 con lo que $\sim P \vee P$ es una proposición verdadera y el literal 2 esta demostrado. Ahora bien, ya que $\sim P \vee P \rightarrow P \vee \sim P$ (3) por el axioma de conmutatividad y $\sim P \vee P$ (4) es verdadero entonces aplicando un modus ponendo ponens entre (3) y (4) se logra que $P \vee \sim P$ es una proposición verdadera. $\square$

El teorema del medio excluido 2.2 especificamente en el hecho que $P \vee \sim P$ expresa un principio de dicotomía, es decir, que alguna de las dos proposiciones P o $\sim P$ son verdaderas pero no las dos al mismo tiempo debido a que $P \wedge \sim P$ en sí es una contradicción como se mostró en el ejemplo 2.16 a través de las tablas de verdad.

Teorema 2.3. ***Doble Negación*** *Sea P una proposición entonces*

1. $P \rightarrow \sim (\sim P)$ *es una proposición verdadera.*
2. $\sim (\sim P) \rightarrow P$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Afirmación-razón]

1. $\sim P \vee \sim (\sim P)$	...Medio excluido (teorema 2.2)
2. $P \rightarrow \sim (\sim P)$	...Definición de condicional en 1
3. $\sim (\sim P) \vee \sim (\sim (\sim P))$	...Medio excluido
4. $\sim P \rightarrow \sim (\sim (\sim P))$	...Definición de condicional en 3
5. $P \vee \sim P \rightarrow P \vee \sim (\sim (\sim P))$	...Adición a la implicación en 4
6. $P \vee \sim P$	...Medio excluido
7. $P \vee \sim (\sim (\sim P))$	...Modus ponendo ponens entre 5 y 6
8. $P \vee \sim (\sim (\sim P)) \rightarrow \sim (\sim (\sim P)) \vee P$	...Axioma de conmutatividad
9. $\sim (\sim (\sim P)) \vee P$	...Modus ponendo ponens entre 7 y 8
10. $\sim (\sim P) \rightarrow P$	...Definición de condicional en 9

Un simil de la propiedad de doble negación se encuentra en las propiedades de los números enteros conocida como ley de signos, donde $-(-m) = m$ lo cual indica que el opuesto del opuesto de un número m es el mismo número. El siguiente teorema llamado de conjunción se desprende de la tabla de verdad del conector que ella su nombre, donde $P \wedge Q$ es verdadera siempre que P y Q sean verdaderas también.

Teorema 2.4. ***Conjunción*** *Si P y Q son proposiciones verdaderas entonces $P \wedge Q$ es una proposición verdadera. En forma esquemática*

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline P \wedge Q \end{array}$$

Demostración [Prosa]

Las hipótesis en este caso es que tanto P como Q son verdaderas. Por el teorema de doble negación se tiene que $P \rightarrow \sim (\sim P)$ es una proposición verdadera que por modus ponendo ponens con P resulta que $\sim (\sim P)$ es una proposición verdadera. Con base en el axioma de adjunción se sigue que $\sim (\sim P) \rightarrow \sim (\sim P) \vee \sim Q$ y por modus ponendo ponens con $\sim (\sim P)$ se obtiene que $\sim (\sim P) \vee \sim Q$ es una proposición verdadera, que por la definición de condicional se escribe como $\sim P \rightarrow \sim Q$ (1).

Si al condicional obtenido en (1) se aplica el axioma de adición a la implicación (respecto de la proposición $\sim Q$) se logra $\sim Q \vee \sim P \rightarrow \sim Q \vee \sim Q$ (2); como $\sim Q \vee \sim Q \rightarrow \sim Q$ (3) esto por el axioma de idempotencia, entonces al aplicar la transitividad entre los condicionales dados en (2) y (3) resulta $\sim Q \vee \sim P \rightarrow \sim Q$ (4). Debido a que $\sim P \vee \sim Q \rightarrow \sim Q \vee \sim P$ esto por el axioma de conmutatividad entonces por el teorema de transitividad $\sim P \vee \sim Q \rightarrow \sim Q$, que al aplicar la definición de condicional se tiene $\sim (\sim P \vee \sim Q) \vee \sim Q$ (5).

La expresión (5) se puede escribir como $\sim Q \vee \sim (\sim P \vee \sim Q)$ que por la definición de condicional $Q \rightarrow \sim (\sim P \vee \sim Q)$, al ser Q una proposición verdadera entonces por un modus ponendo ponens se tiene que $\sim (\sim P \vee \sim Q)$ es una proposición verdadera, con base en la definición de conjunción 2.1 se concluye que $P \wedge Q$ es una proposición verdadera, siempre que P y Q sean verdaderas. $\square$

A partir del teorema de conjunción 2.4 es posible obtener teoremas que hayan uso del bicondicional, ya que de acuerdo con la definición de este conector 2.3, $P \leftrightarrow Q$ equivale a $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ y así hacer uso de la regla de inferencia de sustitución. La primer consecuencia es que el teorema de doble negación 2.3 se puede escribir en términos de un bicondicional, de allí el nombre que recibe el siguiente teorema.

Teorema 2.5. ***Doble Negación-Equivalencia*** *Sea P una proposición entonces*

$$P \leftrightarrow \sim (\sim P)$$

es una proposición verdadera.

Demostración [Afirmación-razón]

1. $P \rightarrow \sim (\sim P)$	... Teorema doble negación 2.3
2. $\sim (\sim P) \rightarrow P$	... Teorema doble negación 2.3
3. $[P \rightarrow \sim (\sim P)] \wedge [\sim (\sim P) \rightarrow P]$	... Conjunción (teorema 2.4) entre 1 y 2
4. $P \leftrightarrow \sim (\sim P)$	... Definición de bicondicional (definición 2.3) en 3

En la sección anterior se dijo que, asociado al condicional $P \rightarrow Q$ está el contrarrecíproco $\sim Q \rightarrow \sim P$, el cual tiene el mismo valor de verdad del condicional dado; en el siguiente teorema se demuestra que no solo poseen los mismos valores de verdad sino que son ambas proposiciones son equivalentes independientes de los valores de verdad de las proposiciones P y Q.

Teorema 2.6. ***Contrarrecíproco*** *Sean P y Q proposiciones entonces*

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$$

es una proposición verdadera.

Demostración [Prosa]

Por el axioma de conmutatividad se tiene $\sim P \vee Q \rightarrow Q \vee \sim P$ (1), puesto que Q es equivalente a $\sim (\sim Q)$ por el teorema de doble negación 2.5, así en (1)

$$\sim P \vee Q \rightarrow \sim (\sim Q) \vee \sim P$$

la anterior proposición se escribe como $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ (2) debido a la definición de condicional. Por un razonamiento análogo $Q \vee \sim P \rightarrow \sim P \vee Q$ es una proposición verdadera por el axioma de conmutatividad y esto conduce al condicional $(\sim Q \rightarrow \sim P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (3) que al aplicar el teorema de conjunción entre las proposición (2) y (3) se escribe

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P) \quad \wedge \quad (\sim Q \rightarrow \sim P) \rightarrow (P \rightarrow Q)$$

Que según la definición del bicondicional 2.3 se concluye $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$. □

El teorema de simplificación que se presenta a continuación indica que si una conjunción $P \wedge Q$ es verdadera entonces tanto P como Q son verdaderas, es decir, se pueden utilizar de forma independientes las proposiciones simples P o Q de acuerdo con lo que se necesite. Dicho teorema se basa en la tabla de verdad de la conjunción.

Teorema 2.7. ***Simplificación*** *Si $P \wedge Q$ es una proposición verdadera entonces P es una proposición verdadera y Q es una proposición verdadera. Esquemáticamente se escribe*

$$\frac{P \ \wedge \ Q}{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}}$$

Demostración [Afirmación-razón]

1. $P \wedge Q$	... Hipótesis
2. $\sim P \rightarrow (\sim P \vee \sim Q)$	... Axioma de adjunción
3. $\sim (\sim P \vee \sim Q) \rightarrow \sim (\sim P)$	... Contrarrecíproco (teorema 2.6) en 2
4. $P \wedge Q \rightarrow \sim (\sim P)$	... Definición conjunción (definición 2.1) en 3
5. $\sim (\sim P)$	... Modus ponendo ponens entre 1 y 4
6. P	... Doble negación-equivalencia en 5
7. $\sim Q \rightarrow (\sim Q \vee \sim P)$	... Axioma de adjunción
8. $(\sim Q \vee \sim P) \rightarrow (\sim P \vee \sim Q)$	... Axioma de conmutatividad
9. $\sim Q \rightarrow (\sim P \vee \sim Q)$	... Transitividad entre 7 y 8
10. $\sim (\sim P \vee \sim Q) \rightarrow \sim (\sim Q)$	... Contrarrecíproco en 9
11. $P \wedge Q \rightarrow \sim (\sim Q)$	... Definición conjunción en 10
12. $\sim (\sim Q)$	... Modus ponendo ponens entre 1 y 11
13. Q	... Doble negación-equivalencia en 12

Advertencia 2.1. *Tener especial atención con el teorema de simplificación, ya que requiere que el conector principal sea $\wedge$, así en la proposición $\sim P \wedge Q$ se puede aplicar dicho teorema y obtener cualquiera de las dos proposiciones $\sim P$ o Q, sin embargo en una proposición compuesta de la forma $\sim (P \wedge Q)$ no es posible hacer uso de la simplificación para obtener $\sim P$, esto se debe a que la negación de una conjunción es en sí una disyunción $(\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q))$ como se demostrará en el teorema 2.15 conocido como Ley D'Morgan.*

El axioma de conmutatividad 2.3 indica que el conector $\vee$ permite intercambiar el orden de las proposiciones simples que le componen sin cambiar el valor de verdad y la estructura de la disyunción $P \vee Q$. En el teorema siguiente se demuestra que este axioma presenta la estructura de un bicondicional y que además el conector $\wedge$ también satisface la propiedad conmutativa.

Teorema 2.8. ***Conmutatividad*** *Sean P, Q proposiciones entonces*

1. $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$

2. $P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$

Demostración [Prosa]

Por medio del axioma de conmutatividad se tiene que $P \vee Q \rightarrow Q \vee P$ y $Q \vee P \rightarrow P \vee Q$, que por el teorema de conjunción 2.4 se obtiene

$$P \vee Q \rightarrow Q \vee P \qquad \wedge \qquad Q \vee P \rightarrow P \vee Q$$

Con base en la definición de bicondicional se sigue que $P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$ con esto se concluye la demostración del literal 1. Por el axioma de conmutatividad $\sim Q \vee \sim P \rightarrow \sim P \vee \sim Q$, que al aplicar el teorema del contrarrecíproco (teorema ver 2.6) se tiene $\sim (\sim P \vee \sim Q) \rightarrow \sim (\sim Q \vee \sim P)$ y así por la definición de conjunción resulta $P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P$ (1); un razonamiento análogo conduce a $Q \wedge P \rightarrow P \wedge Q$, que por conjunción con (1) se tiene

$$P \wedge Q \rightarrow Q \wedge P \qquad \wedge \qquad Q \wedge P \rightarrow P \wedge Q$$

De donde se concluye que $P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$. $\square$

El bicondicional también es un operador conmutativo como se demostrará en el teorema 2.9, sin embargo el condicional no lo es, remitirse al ejemplo 2.17. El teorema siguiente se llama de equivalencia haciendo alusión a las propiedades que satisface el bicondicional, la primera es que toda proposición es equivalente a si misma, en el caso en que P y Q sean equivalentes ($P \leftrightarrow Q$) entonces el recíproco y contrarrecíproco también son equivalentes. En los ejercicios propuestos se pide demostrar que el bicondicional también satisface la propiedad transitiva, en simil con en el teorema 2.1 en el que el condicional es transitivo.

Teorema 2.9. ***Equivalencia*** *Sean P, Q proposiciones entonces*

1. ***Medio Excluido*** $P \leftrightarrow P$

2. ***Recíproco*** $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$

3. ***Contrarrecíproco*** $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \leftrightarrow \sim P)$

Demostración [Afirmación-razón]

1. $P \to P$ ... Medio excluido (teorema ver 2.2)
2. $P \to P$ ... Medio excluido
3. $(P \to P) \wedge (P \to P)$ ... Conjunción entre 1 y 2
4. $P \leftrightarrow P$ ... Definición de bicondicional en 3
5. $(P \to Q \wedge Q \to P) \leftrightarrow (Q \to P \wedge P \to Q)$ ... Teorema de conmutatividad respecto de $\wedge$
6. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$ ... Definición de bicondicional en 5
7. $(P \to Q \wedge Q \to P) \leftrightarrow (\sim Q \to \sim P \wedge \sim P \to \sim Q)$ ... Contrarrecíproco (teorema 2.6)
8. $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \leftrightarrow \sim P)$ ... Definición de bicondicional en 7

En el axioma 2.1 se indicó que el conector $\vee$ satisface la propiedad de idempotencia respecto de un condicional. En el teorema 2.10 se demostrará que esta propiedad también la satisface el conector $\wedge$ y que además son expresiones equivalentes.

Teorema 2.10. ***Idempotencia*** *Sea P una proposición entonces*

1. $P \vee P \leftrightarrow P$
2. $P \wedge P \leftrightarrow P$

Demostración [Prosa]

Por el axioma de idempotencia $P \vee P \to P$ (1), mientras que por el axioma de idempotencia $P \to P \vee P$ (2), aplicando una conjunción entre las implicaciones (1) y (2) se tiene

$$P \vee P \to P \quad \wedge \quad P \to P \vee P$$

En cuyo caso $P \vee P \leftrightarrow P$ por la definición de bicondicional y así se verifica el literal 1. Si se hace uso de lo que se acaba de demostrar respecto de la proposición $\sim P$ resulta $\sim P \vee \sim P \leftrightarrow \sim P$ (3); como el contrarrecíproco también se satisface con el bicondicional (literal 3 del teorema de equivalencia 2.9), entonces en (3) $\sim (\sim P) \leftrightarrow \sim (\sim P \vee \sim P)$, por la doble negación y la definición de conjunción $P \leftrightarrow P \wedge P$, al utilizar de nuevo el teorema de equivalencia literal 2 se concluye que $P \wedge P \leftrightarrow P$. $\square$

A partir del axioma 2.4 de la adición a la implicación es posible demostrar el teorema 2.11 el cual se denomina adición entre implicaciones ya que hay dos condicionales a diferencia del axioma 2.4 en el cual hay solo un condicional. En este teorema 2.11 se hace una disyunción entre los antecedentes y al mismo tiempo entre los consecuentes. Igual situación ocurre con la conjunción.

Teorema 2.11. ***Adición entre implicaciones*** *Si $P \rightarrow Q$ y $R \rightarrow S$ son proposiciones verdaderas entonces*

1. *$P \vee R \rightarrow Q \vee S$ es una proposición verdadera*

$$\begin{array}{rcl} P & \rightarrow & Q \\ R & \rightarrow & S \\ \hline P \vee R & \rightarrow & Q \vee S \end{array}$$

2. *$P \wedge R \rightarrow Q \wedge S$ es una proposición verdadera*

$$\begin{array}{rcl} P & \rightarrow & Q \\ R & \rightarrow & S \\ \hline P \wedge R & \rightarrow & Q \wedge S \end{array}$$

Demostración [Afirmación-razón]

1. $P \rightarrow Q$	. . . Hipótesis
2. $R \rightarrow S$	. . . Hipótesis
3. $R \vee P \rightarrow R \vee Q$	. . . Adición a la implicación en 1
4. $P \vee R \rightarrow Q \vee R$	. . . Conmutativa (Teorema 2.8) en 3
5. $Q \vee R \rightarrow Q \vee S$	. . . Adición a la implicación en 2
6. $P \vee R \rightarrow Q \vee S$	. . . Transitividad entre 4 y 5
7. $\sim Q \rightarrow \sim P$	. . . Contrarrecíproco en 1
8. $\sim S \rightarrow \sim R$	. . . Contrarrecíproco en 2
9. $(\sim Q \vee \sim S) \rightarrow (\sim P \vee \sim R)$	. . . Literal 1 de este teorema entre 7 y 8
10. $\sim (\sim P \vee \sim R) \rightarrow \sim (\sim Q \vee \sim S)$	. . . Contrarrecíproco en 9
11. $P \wedge R \rightarrow Q \wedge S$	. . . Definición de conjunción en 10

Teorema 2.12. ***Método de Casos*** *Si $P \rightarrow Q$, $R \rightarrow S$ y $P \vee R$ son proposiciones verdaderas entonces $Q \vee S$ es una proposición verdadera. Esquemáticamente*

$$\begin{array}{ccc} P & \rightarrow & Q \\ R & \rightarrow & S \\ P & \vee & R \\ \hline Q & \vee & S \end{array}$$

Demostración [Prosa]

Por hipótesis se tienen las implicaciones $P \rightarrow Q$ y $R \rightarrow S$, que al aplicar el teorema de adición entre implicaciones 2.11 resulta el condicional $P \vee R \rightarrow Q \vee S$; (1), ya que $P \vee R$ (2) es la otra hipótesis entonces por el modus ponendo ponens entre (1) y (2) se concluye que $Q \vee S$ es una proposición verdadera. $\square$

Para la utilización del método de casos se requieren dos condicionales y una disyunción compuesta por los antecedentes de los condicionales. Sin embargo el método de casos se puede reformular también si la tercer premisa se sustituye por $P \wedge R$ para concluir $Q \wedge S$. El teorema 2.13 recibe el nombre ya que se niega una de las proposiciones (Tolendo) y como conclusión se afirma la otra proposición (Ponens) siempre y cuando haya una disyunción.

Teorema 2.13. ***Modus Tolendo Ponens*** *Sean P, Q proposiciones*

1. *Si $P \vee Q$ y $\sim Q$ son proposiciones verdaderas entonces P es una proposición verdadera.*

$$\begin{array}{c} P \quad \vee \quad Q \\ \sim Q \\ \hline P \end{array}$$

2. *Si $P \vee Q$ y $\sim P$ son proposiciones verdaderas entonces Q es una proposición verdadera.*

$$\begin{array}{c} P \quad \vee \quad Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$$

Demostración [Afirmación-razón]

1. $P \vee Q$	... Hipótesis
2. $\sim Q$	... Hipótesis
3. $Q \vee P$	... Conmutativa en 1
4. $\sim (\sim Q) \vee P$	... Doble negación-equivalencia en 3
5. $\sim Q \rightarrow P$	... Definición de condicional en 4
6. P	... Modus ponendo ponens entre 2 y 5

7. $P \vee Q$	... Hipótesis
8. $\sim P$	... Hipótesis
9. $\sim (\sim P) \vee Q$	... Doble negación en 7
10. $\sim P \rightarrow Q$	... Definición de condicional en 9
11. Q	... Modus ponendo ponens entre 8 y 10

Advertencia 2.2. *Si tenemos como hipótesis que* $(P \vee Q) \wedge R$ *y* $\sim Q$ *entonces no es posible aplicar (por lo menos de forma directa) el modus tolendo ponens para concluir la proposición* $P \wedge R$*, esto se debe a que operador principal de la proposición compuesta* $(P \vee Q) \wedge R$ *no es* $\vee$ *sino* $\wedge$*, la conclusión resulta al aplicar la secuencia*

1. $(P \vee Q) \wedge R$	*. . . Hipótesis*
2. $\sim Q$	*. . . Hipótesis*
3. $P \vee Q$	*. . . Simplificación en 1*
4. P	*. . . Modus tolendo ponens entre 2 y 3*
5. R	*. . . Simplificación en 1*
6. $P \wedge R$	*. . . Conjunción entre 4 y 5*

Y así se logra la conclusión pedida pero no se hace uso del modus tolendo ponens de forma directa, se requiere otra serie de teoremas.

Por su parte el teorema del modus tolendo tolens (método de negar negando) indica que si se tiene un condicional y se presenta la negación del consecuente entonces se concluye la negación del antecedente.

Teorema 2.14. ***Modus Tolendo Tolens*** *Si* $P \to Q$ *y* $\sim Q$ *son proposiciones verdaderas entonces* $\sim P$ *es una proposición verdadera.*

$$\begin{array}{c} P \quad \to \quad Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array}$$

Demostración [Prosa]

Por hipótesis $P \to Q$, al aplicar el teorema del contrarrecíproco resulta $\sim Q \to \sim P$, ya que $\sim Q$ es hipótesis entonces por un modus ponendo ponens se concluye que $\sim P$ es una proposición verdadera. $\square$

Uno de los teoremas centrales de la lógica proposicional se denomina Ley D'Morgan (por el matemático Augustus De Morgan) el cual caracteriza la negación de las proposiciones compuestas, en el caso de "la negación de la disyunción se obtiene la conjunción de las negación"; de forma similar se obtiene la negación de una conjunción. La negación del bicondicional está propuesta dentro de los ejercicios, para el que $\sim (P \leftrightarrow Q)$ equivale a cualquiera de las proposiciones $\sim P \leftrightarrow Q$ o $P \leftrightarrow \sim Q$, es decir, para negar un bicondicional se niega solo una de las proposiciones preservando la equivalencia.

Teorema 2.15. ***Ley de D'Morgan*** *Sean P, Q proposiciones entonces*

1. $\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$
2. $\sim(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$
3. $\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$

Demostración [Afirmación-razón]

1. $P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$	...Teorema de equivalencia
2. $P \wedge Q \leftrightarrow \sim(\sim P \vee \sim Q)$	...Definición de conjunción en 1
3. $\sim[\sim(\sim P \vee \sim Q)] \leftrightarrow \sim(P \wedge Q)$	...Teorema de equivalencia en 2 (contrarrecíproco)
4. $(\sim P \vee \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \wedge Q)$	...Doble negación en 3
5. $\sim(P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$	...Teorema de equivalencia en 4 (recíproco)
6. $(\sim P \wedge \sim Q) \leftrightarrow \sim[\sim(\sim P) \vee \sim(\sim Q)]$	...Definición de conjunción
7. $(\sim P \wedge \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \vee Q)$	...Doble negación en 6
8. $\sim(P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$	...Teorema de equivalencia en 7 (recíproco)
9. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \vee Q)$	...Definición de condicional
10. $\sim(\sim P \vee Q) \leftrightarrow \sim(P \rightarrow Q)$	...Teorema de equivalencia en 9 (contrarrecíproco)
11. $[\sim(\sim P) \wedge \sim Q] \leftrightarrow \sim(P \rightarrow Q)$	...Literal 2 de este teorema en 10
12. $(P \wedge \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \rightarrow Q)$	...Doble negación en 11
13. $\sim(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$	...Teorema de equivalencia en 12 (recíproco)

Ejemplo 2.22. *La proposición "Si $x \neq 0$ entonces $x > 0$ o $x < 0$" se puede escribir como una proposición compuesta de la forma $P \rightarrow Q \vee R$, así por la ley D'Morgan, en la negación $\sim(P \rightarrow Q \vee R)$ resulta la proposición equivalente $P \wedge \sim(Q \vee R)$ que al aplicar de nuevo esta ley resulta $P \wedge (\sim Q \wedge \sim R)$, en lenguaje natural la negación de la proposición dada es "$x \neq 0$ y $x \ngtr 0$ y $x \nless 0$".*

Dentro de las propiedades de los números reales se encuentra la propiedad asociativa, la cual indica que dados tres números se tienen las igualdad $(a + b) + c = a + (b + c)$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, tal propiedad se presenta también respecto de las proposiciones y de los conectores $\vee$ y $\wedge$ como se enuncia a continuación. El bicondicional es asociativo, es decir, $[P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)] \leftrightarrow [(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R]$, mientras que el condicional no lo es, esto se puede justificar a través de la tabla de verdad, donde el resultado es una indeterminación.

Teorema 2.16. ***Asociativa*** *Sean P, Q, R proposiciones entonces*

1. $(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
2. $(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

Demostración [Prosa]

Por el axioma de adjunción $Q \to Q \vee R$, que por el axioma de adición a la implicación se escribe $P \vee Q \to P \vee (Q \vee R)$ (1). A su vez $R \to R \vee Q$ que por la conmutatividad $R \to Q \vee R$, para lo que $P \vee R \to P \vee (Q \vee R)$ (2). Como $R \to R \vee P \to P \vee R$ que al aplicar la transitividad con el condicional (2) resulta $R \to P \vee (Q \vee R)$ (3); por el teorema de adición entre implicaciones en este caso entre (1) y (3) se obtiene $(P \vee Q) \vee R \to [P \vee (Q \vee R)] \vee [P \vee (Q \vee R)]$ que por el teorema de idempotencia equivale a $(P \vee Q) \vee R \to P \vee (Q \vee R)$ (4).

Con base en el axioma de adjunción resulta que $P \to P \vee Q$, como $R \to R$ por el medio excluido entonces al hacer uso de la adición entre implicaciones resulta $P \vee R \to (P \vee Q) \vee R$ (5). De igual manera $Q \to Q \vee P \to P \vee Q$ que al adicionarle la proposición R a ambos lados se tiene $Q \vee R \to (P \vee Q) \vee R$ (6). Debido a que $P \to P \vee R$ entonces por transitividad con la expresión (5) resulta $P \to (P \vee Q) \vee R$ que al aplicar la adición entre implicación con (6) y la propiedad de idempotencia se concluye que $P \vee (Q \vee R) \to (P \vee Q) \vee R$ (7). Aplicando el teorema de conjunción entre (4) y (7)

$$[(P \vee Q) \vee R \to P \vee (Q \vee R)] \wedge [P \vee (Q \vee R) \to (P \vee Q) \vee R]$$

Y así se concluye la propiedad asociativa para la disyunción $P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$. Para demostrar el literal 2 se sustituye P, Q y R por sus respectivas negaciones $\sim P$, $\sim Q$ y $\sim R$ para tener $(\sim P \vee \sim Q) \vee \sim R \leftrightarrow \sim P \vee (\sim Q \vee \sim R)$; debido al teorema de equivalencia respecto del contrarrecíproco se obtiene

$$\sim [\sim P \vee (\sim Q \vee \sim R)] \leftrightarrow \sim [(\sim P \vee \sim Q) \vee \sim R]$$

Por medio de la ley de D'Morgan se sigue que

$$\sim (\sim P) \wedge \sim (\sim Q \vee \sim R) \leftrightarrow \sim (\sim P \vee \sim Q) \wedge \sim (\sim R)$$

Una doble negación y de nuevo otra ley D'Morgan

$$P \wedge \sim (\sim Q \vee \sim R) \leftrightarrow \sim (\sim P \vee \sim Q) \wedge R$$

Por la definición de conjunción $P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$, y el teorema de equivalencia se concluye la propiedad asociativa para la conjunción $(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$. $\square$

Advertencia 2.3. *Dado el conjunto de hipótesis* $(P \to Q) \vee R$ *y* $\sim Q$ *se puede deducir la proposición* $\sim P \vee R$*, pero no haciendo uso del modus tolendo tolens entre las proposiciones* $P \to Q$ *y* $\sim Q$*, esto se debe a que el conector que prima en la proposición* $(P \to Q) \vee R$ *no es el condicional sino la disyunción. En la siguiente secuencia se ilustra el como llegar a esta conclusión*

1. $(P \to Q) \vee R$	*. . . Hipótesis*
2. $\sim Q$	*. . . Hipótesis*
3. $(\sim P \vee Q) \vee R$	*. . . Definición de condicional en 1*
4. $\sim P \vee (Q \vee R)$	*. . . Asociativa en 3*
5. $\sim P \vee (R \vee Q)$	*. . . Conmutativa en 4*
6. $(\sim P \vee R) \vee Q$	*. . . Asociativa en 5*
7. $\sim P \vee R$	*. . . Modus tolendo ponens entre 2 y 6*

En la expresión $5 \cdot (3+4)$ la operación que debe efectuarse en primer momento es la adición y luego la multiplicación para obtener 35 como resultado; otro procedimiento admisibles es resolver $5 \cdot 3 + 5 \cdot 4$ donde se intercambia el orden para hacer primero las multiplicaciones y luego la adición, esto se escribe como $5 \cdot (3+4) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 4$ y recibe el nombre de propiedad distributiva. Este planteamiento se generaliza a la proposiciones con base en los conectores $\vee$, $\wedge$ y $\to$.

Teorema 2.17. ***Distributiva*** *Sean* P, Q, R *proposiciones entonces*

1. ***Conjunción respecto disjunción:*** $P \wedge (Q \vee R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
2. ***Disjunción respecto conjunción:*** $P \vee (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
3. ***Condicional respecto conjunción:*** $[P \to (Q \wedge R)] \leftrightarrow (P \to Q) \wedge (P \to R)$
4. ***Condicional respecto disjunción:*** $[P \to (Q \vee R)] \leftrightarrow (P \to Q) \vee (P \to R)$

Demostración [Prosa]

Por la propiedad del medio excluido y del axioma de adjunción se tienen las implicaciones $P \to P$ y $Q \to Q \vee R$, que por la adición entre implicaciones $P \wedge Q \to P \wedge (Q \vee R)$ (1). Nuevamente se utiliza el axioma de adjunción $R \to R \vee Q$, donde se escribe $R \to Q \vee R$ y por la adición entre implicaciones $P \wedge R \to P \wedge (Q \vee R)$ (2). Haciendo uso de la adición entre implicaciones para los condicionales (1) y (2) resulta

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \to [P \wedge (Q \vee R)] \vee [P \wedge (Q \vee R)]$$

Que por la propiedad de idempotencia (2.10) se escribe $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \rightarrow P \wedge (Q \vee R)$ (3). La siguiente proposición se justifica por el teorema de adición entre implicaciones

$$[(P \rightarrow \sim Q) \wedge (P \rightarrow \sim R)] \rightarrow [P \wedge P \rightarrow \sim Q \wedge \sim R]$$

Por la propiedad de idempotencia resulta $[(P \rightarrow \sim Q) \wedge (P \rightarrow \sim R)] \rightarrow [P \rightarrow \sim Q \wedge \sim R]$, a continuación se define los condicionales para tener

$$[(\sim P \vee \sim Q) \wedge (\sim P \vee \sim R)] \rightarrow [P \rightarrow \sim Q \wedge \sim R]$$

Cuyo contrarrecíproco es $\sim [P \rightarrow \sim Q \wedge \sim R] \rightarrow \sim [(\sim P \vee \sim Q) \wedge (\sim P \vee \sim R)]$ haciendo uso de la ley D'Morgan y de la definición de conjunción se escribe

$$[P \wedge (\sim (\sim Q) \vee \sim (\sim R))] \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Por doble negación se tiene el condicional $[P \wedge (Q \vee R)] \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ (4); por conjunción entre (3) y (4) se tiene

$$\{[P \wedge (Q \vee R)] \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)\} \wedge \{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \rightarrow P \wedge (Q \vee R)\}$$

Y la definición de bicondicional concluye que $P \wedge (Q \vee R) \longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. Para el literal 2 se hace uso del literal 1 donde cada proposición se cambia por la negación de la misma $\sim P \wedge (\sim Q \vee \sim R) \longleftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge \sim R)$ por el teorema de equivalencia el contrarrecíproco es equivalente $\sim [(\sim P \wedge \sim Q) \vee (\sim P \wedge \sim R)] \longleftrightarrow \sim [\sim P \wedge (\sim Q \vee \sim R)]$, que por la propiedad de D'Morgan

$$\sim (\sim P \wedge \sim Q) \wedge \sim (\sim P \wedge \sim R) \longleftrightarrow \sim (\sim P) \vee \sim (\sim Q \vee \sim R)$$

De nuevo se aplica la propiedad de D'Morgan para lo que

$$[\sim (\sim P) \vee \sim (\sim Q)] \wedge [\sim (\sim P) \vee \sim (\sim R)] \longleftrightarrow \sim (\sim P) \vee (Q \wedge R)$$

Por medio del teorema de doble negación resulta que $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \longleftrightarrow P \vee (Q \wedge R)$ que por el teorema de equivalencia se concluye $P \vee (Q \wedge R) \longleftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Por la definición de condicional se tiene la equivalencia $[P \rightarrow (Q \wedge R)] \leftrightarrow \sim P \vee (Q \wedge R)$, donde es posible aplicar la distributiva de la disjunción respecto de la conjunción para tener $[P \rightarrow (Q \wedge R)] \leftrightarrow (\sim P \vee Q) \wedge (\sim P \vee R)$ y así por la definición de condicional se concluye $[P \rightarrow (Q \wedge R)] \leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$.

Por medio de la definición del condicional y de la propiedad de idempotencia aplicado a la proposición $\sim P$ se tiene $[P \rightarrow (Q \vee R)] \leftrightarrow \sim P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim P) \vee (Q \vee R)$, ahora bien, por los teorema de conmutatividad y asociatividad respecto de la disjunción resulta

$$[P \rightarrow (Q \vee R)] \leftrightarrow \sim P \vee (\sim P \vee Q) \vee R$$

$$\begin{aligned}&\leftrightarrow \sim P \vee (Q \vee \sim P) \vee R\\&\leftrightarrow (\sim P \vee Q) \vee (\sim P \vee R)\end{aligned}$$

Lo cual permite concluir que $[P \to (Q \vee R)] \leftrightarrow (P \to Q) \vee (P \to R)$. $\square$

Advertencia 2.4. *Consideremos las proposiciones $(P \to Q) \to R$ y P, en este caso no es posible hacer uso del modus ponendo ponens entre las dos hipótesis para deducir $Q \to R$, ya que en el condicional $(P \to Q) \to R$ el antecedente es $P \to Q$ el cual no sabemos si es cierto. Veamos el siguiente razonamiento*

1. $(P \to Q) \to R$	*. . . Hipótesis*
2. P	*. . . Hipótesis*
3. $\sim (\sim P \vee Q) \vee R$	*. . . Definición de condicional en 1*
4. $(P \wedge \sim Q) \vee R$	*. . . Ley D'Morgan y doble negación en 3*
5. $(P \vee R) \wedge (\sim Q \vee R)$	*. . . Distributiva en 4*
6. $\sim Q \vee R$	*. . . Simplificación en 5*
7. $Q \to R$	*. . . Definición de condicional en 6*

Nótese que la conclusión se obtiene sin hacer uso de que P es una proposición verdadera, lo que reafirma el hecho que no se puede aplicar el modus ponendo ponens bajo la situación planteada.

Ejemplo 2.23. *Consideremos la proposición compuesta $P \vee Q$ la cual representa una disjunción entre las proposiciones P y Q. A continuación se escribirá dicha proposición en términos solo de la conjunción y la implicación. Por la ley D'Morgan se tiene que $P \vee Q \leftrightarrow \sim (\sim P \wedge \sim Q)$, lo cual garantiza que $P \vee Q$ quede escrita en términos de la conjunción. Ahora, para que se escriba por medio de un condicional se hace uso de la definición de condicional y de la doble negación para tener $P \vee Q \leftrightarrow \sim P \to Q$. El mismo procedimiento puede hacerse para las proposiciones compuestas $P \wedge Q$, $P \to Q$ y $P \leftrightarrow Q$. En la siguiente tabla se resumen estos resultados*

Proposición	*Disjunción*	*Conjunción*	*Condicional*
$P \vee Q$	$P \vee Q$	$\sim (\sim P \wedge \sim Q)$	$\sim P \to Q$
$P \wedge Q$	$\sim (\sim P \vee \sim Q)$	$P \wedge Q$	$\sim (P \to \sim Q)$
$P \to Q$	$\sim P \vee Q$	$\sim (P \wedge \sim Q)$	$P \to Q$
$P \leftrightarrow Q$	$\sim [\sim (\sim P \vee Q) \vee \sim (\sim Q \vee P)]$	$\sim (P \wedge \sim Q) \wedge \sim (Q \wedge \sim P)$	$\sim [(P \to Q) \to \sim (Q \to P)]$

2.4. Ejercicios

1. Por medio de las tablas de verdad muestre que cada uno de los teoremas y axiomas enunciados para la lógica proposicional son tautologías.

2. ¿Cuáles de los teoremas de la lógica proposicional son equivalencias (El conector es un bicondicional)? ¿Cuáles utilizan sólo la implicación?

3. Para cada caso, enuncie un teorema, dada la interpretación

   a) Todo enunciado es condición suficiente y necesaria para su doble negación.

   b) La negación de la conjunción de dos enunciados es condición necesaria y suficiente para la disyunción de sus negaciones.

   c) Si una disyunción es verdadera y una de sus componentes es falsa, entonces la otra componente es verdadera.

   d) En una disyunción no importa el orden de sus componentes.

   e) La conjunción de dos fórmulas es condición suficiente para cualquiera de las dos.

4. Sean P:"$m.c.m.(12, 8) = 24$" y Q:"$m.c.d.(7, 11) = 2$" proposiciones simples. Determine el valor de verdad de P y Q. Para las proposiciones compuestas que se plantean a continuación halle el valor de verdad y la respectiva negación (Ley D'Morgan 2.15)

   a) $P \to Q$ b) $\sim P \wedge Q$ c) $\sim P \vee Q$

   d) $P \leftrightarrow Q$ e) $\sim (P \wedge Q)$ f) $(P \vee Q) \to P$

5. Niegue cada uno de los siguientes enunciados, determinando el valor de verdad

   a) Si $x = 3$ entonces $x^2 - 3x = 0$.

   b) n es primo sii es divisible por n y por 1.

   c) Si un triángulo es equilátero entonces es isósceles.

   d) $m^2 - 4m = 0$ sii $m = 0$ o $m = 4$.

   e) Si un número es entero entonces es par o es impar.

   f) Si $p \parallel q$ y $q \perp r$ entonces $p \perp r$.

6. Enuncie el teorema de casos para el conector $\wedge$ y haga la respectiva demostración.

7. Demuestre que el condicional satisface las propiedades

   a) $Q \to (P \to Q)$

   b) $\sim P \to (P \to Q)$

   c) $P \to (\sim P \to Q)$

   d) Si $P \to Q$ entonces $P \wedge R \to Q \wedge R$

8. En los métodos de demostración se hará uso del siguiente resultado llamado el método de casos

$$\frac{P \vee Q \ \rightarrow \ R}{(P \rightarrow R) \ \wedge \ (Q \rightarrow R)}$$

9. Demuestre las siguientes propiedades

Hipótesis	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$
Tesis	$(P \rightarrow R) \rightarrow [P \rightarrow (Q \wedge R)]$	$(R \rightarrow Q) \rightarrow [(P \vee R) \rightarrow Q]$	$(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

10. Demuestre las equivalencias

    a) $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [P \wedge Q \rightarrow R]$

    b) $[P \rightarrow (Q \vee \sim R)] \leftrightarrow [(R \wedge P) \rightarrow Q]$

    c) $[P \rightarrow (Q \vee R)] \leftrightarrow [Q \vee (P \rightarrow R)]$

11. Suponga que $P \rightarrow Q$ es una proposición verdaderas, demuestre que $P \wedge R \rightarrow Q$ es una proposición verdadera.

12. Demuestre la siguiente versión del método de casos

$$\begin{array}{c} P \ \rightarrow \ R \\ \underline{\sim P \ \rightarrow \ R} \\ R \end{array}$$

13. Demuestre que el bicondicional satisface la propiedad transitiva

$$[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \rightarrow (P \leftrightarrow R)$$

14. Haciendo uso del sistema formal de la lógica proposicional escribir las proposiciones compuestas de la primer columna en términos de los conectores que se especifican en las columnas restantes

Proposición	*Disjunción*	*Conjunción*	*Condicional*	*Bicondicional*
$\sim (P \rightarrow \sim Q)$				
$P \vee (Q \wedge R)$				
$\sim (P \wedge Q)$				

15. Demuestre el siguiente caso particular de adición entre implicaciones

$$\begin{array}{rcl} P & \rightarrow & Q \\ P & \rightarrow & R \\ \hline P & \rightarrow & Q \wedge R \end{array}$$

16. El teorema de adición entre implicaciones es verdadero con el bicondicional como se enuncia a continuación. Diseñe la demostración

$$\begin{array}{rcl} P & \leftrightarrow & Q \\ R & \leftrightarrow & S \\ \hline P \vee R & \leftrightarrow & Q \vee R \\ P \wedge R & \leftrightarrow & Q \wedge R \end{array}$$

17. El siguiente teorema se conoce como **cancelación de la equivalencia**, hacer la demostración

$$\begin{array}{rcl} P \wedge R & \leftrightarrow & Q \\ R & & \\ \hline P & \leftrightarrow & Q \end{array}$$

18. Con base en la cancelación de la equivalencia (ejercicio anterior) y el teorema del medio excluido demuestre

    a) $[(P \rightarrow Q) \rightarrow Q] \leftrightarrow (P \vee Q)$
    b) $[(P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q)] \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$

19. Si P y Q son proposiciones equivalentes $(P \leftrightarrow Q)$ y R es una proposición. Demuestre

    a) $\sim P \leftrightarrow \sim Q$
    b) $\sim (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \leftrightarrow Q)$
    c) $(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)$

20. Del conjunto de proposiciones que se presentan a continuación, indique cuales de ellas son teoremas (tautología) y demuestre la veracidad de los mismos.

    a) $[(P \rightarrow Q) \rightarrow S] \leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow S)]$
    b) $[P \rightarrow P \wedge P] \leftrightarrow [P \leftrightarrow P]$
    c) $\sim (P \wedge Q) \rightarrow \sim P$
    d) $\{[(P \vee Q) \vee R] \wedge \sim Q\} \rightarrow (P \vee R)$

21. ¿Cumple el bicondicional la propiedad asociativa? En caso afirmativo demuestrelo. (Hacer la tabla de verdad)

2.5. Argumentación, razonamiento e inferencia

En este sección se vera como el sistema formal de la lógica proposicional que se ha construido ayudará a determinar qué tipo de esquemas de inferencia o razonamientos aseguran la validez de las conclusiones. Se puede decir, como Carlos Muñoz Gutiérrez, que el razonamiento lógico es un conjunto de afirmaciones, proposiciones o juicios que mantienen entre sí relaciones lógicas, de forma que partiendo de algunos juicios dados llamados "premisas", se puede llegar deductivamente a un juicio que no se tenia y al que se denomina "conclusión", mediante la utilización de axiomas, definiciones y la aplicación de reglas de inferencia y teoremas; la obtención de la conclusión, si se procede lógicamente, asegura la validez de la misma, por la propia estructura lógica de las proposiciones que componen las premisas.

Si se tiene como premisas las proposiciones: "Si me caigo entonces me golpeo" y "me caigo" ¿Qué se puede concluir? Innegablemente, que "me golpeo". Esta es una "inferencia" o "razonamiento deductivo", en la que si las premisas fueran verdaderas, también lo sería la conclusión.

Ejemplo 2.24. *Veamos otros ejemplos*

a. Si llueve entonces se me seca la ropa y llueve. Luego, se me seca la ropa.

b. Si llueve entonces me mojo y me mojo. Luego, llueve.

El razonamiento *a.* parece falso, puesto que no ocurre en la cotidianidad que cuando llueva se seque la ropa; por el contrario, el razonamiento *b.* parece verdadero, pues efectivamente si me mojo puede ser porque llueva. Sin embargo, este análisis responde a lo que se denomina "verdad material". La verdad material es un asunto de experiencia; podría ser que efectivamente cuando llueva se nos seque la ropa, pero en este mundo ocurre lo contrario. La verdad material es un asunto que investiga las ciencias empíricas o experimentales que necesitan acudir a la experiencia para determinar la verdad de sus teorías. La lógica no se ocupa de este tipo de verdad, sino de la "validez" o "verdad formal". En este sentido, prescience del contenido de las proposiciones para ocuparse únicamente de la forma lógica de las mismas.

Ejemplo 2.25. *Se puede simbolizar los razonamientos presentados en el ejemplo 2.24 haciendo P:"llueve", Q:"se me seca la ropa", R:"me mojo" por lo que el razonamiento expuesto en el literal a. se escribe como*

$$\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

Se ve como este razonamiento tiene la forma de la regla de inferencia del Modus Ponendo Ponens, luego este esquema de inferencia es válido. Por otro lado, si se construye la tabla de verdad asociada a este razonamiento encontraremos que se trata de una tautología. Para el razonamiento b. del ejemplo 2.24 se puede escribir de forma esquemática como

$$\begin{array}{l} P \;\rightarrow\; R \\ R \\ \hline P \end{array}$$

Este razonamiento no coincide con ninguna regla de inferencia o teorema, y tampoco se puede deducir la conclusión a partir de las premisas mediante la aplicación de varias reglas de inferencia, teoremas o la utilización de axiomas y definiciones. Si se construye la tabla de verdad correspondiente al esquema anterior $[(P \rightarrow R) \wedge R] \rightarrow P$ *el resultado es una indeterminación, es decir, existen casos para los cuales es falso el razonamiento y casos para los cuales es verdadero.*

En conclusión, el sistema formal de la lógica proposicional que se ha construido da las herramientas para saber si un razonamiento es o no "válido"; es decir, si la conclusión se puede deducir lógicamente de las premisas o no. En este mismo sentido y haciendo una adaptación a la propuesta de Toulman (1979), todo argumento debe tener los siguientes elementos:

1. **Tesis**: Es la conclusión a la que se quiere llegar con la argumentación.
2. **Fundamento**: Base o premisa sobre la que se apoya la tesis.
3. **Garantes**: Enunciados que justifican el paso o conexión entre el fundamento y la tesis (pueden ser leyes de la naturaleza, principios legales, fórmulas de ingeniería, lugares comunes, leyes lógicas, según el caso).
4. **Un cuerpo general** de información que presupone el garante utilizado en el argumento (Teorías científicas bien corroboradas, sistemas legislativos, teorías matemáticas, sistema formal de la lógica proposicional, entre otras).

Ejemplo 2.26. *Para el razonamiento válido del ejemplo 2.25 se sigue que la tesis es Q:" se me seca la ropa", el fundamento es el esquema dado por las proposiciones* $P \rightarrow Q$ *y* P*, el garante es el modus ponendo ponens y el cuerpo general es el sistema formal de la lógica proposicional.*

Ejemplo 2.27. *Para el conjunto de premisas*

1. *Si trabajo, entonces no estudio.*

2. *Estudio o repruebo el curso de matemáticas.*

3. *Aprobé el curso de matemáticas.*

Una conclusión posible es que "No trabajo", para ello se hace la simbolización adecuada donde P : *" Trabajo", Q:" Estudio" y R: " Apruebo el curso de matemáticas", de acuerdo con esto las tres proposiciones se escriben como* $P \to \sim Q$, $Q \vee \sim R$ *y* R *debe concluirse entonces* $\sim P$.

1. $P \to \sim Q$	... *Premisa*
2. $Q \vee \sim R$	... *Premisa*
3. R	... *Premisa*
4. Q	... *Modus tolendo ponens entre 2 y 3*
5. $\sim P$	... *Modus tolendo tolens entre 1 y 4*

Ya que se logró deducir la conclusión a partir de las premisas empleando dos teoremas del sistema formal de la lógica proposicional, entonces el razonamiento es válido.

Ejemplo 2.28. *Para las premisas*

1. *Si tengo razón, entonces estoy loco.*

2. *Pero si estoy loco, entonces tengo razón.*

considérese la conclusión "No estoy loco". Si se representa las proposiciones simples como M*: " tengo razón" y* N*: " estoy loco" entonces las premisas se escriben como* $M \to N$ *y* $N \to M$ *y habría que concluir la proposición* $\sim N$*. Entre las dos hipótesis es posible plantear solo una transitividad para tener* $N \to N$ *y haciendo uso de la definición de condicional se escribe* $\sim N \vee N$ *que es la propiedad de medio excluido y a partir de la cual no se deduce* $\sim N$ *pues ninguna regla ni axioma ni definición ni teorema lo permite, por lo que se concluye que el razonamiento es inválido. Construya la tabla de verdad de este razonamiento para que determinar por qué no es posible deducir la conclusión a partir de las premisas.*

Los siguientes ejemplos es más importante la estructura que el significado de la proposición, es por ello que ya se trabaja en un plano abstracto o simbólico y es muy importante la correcta interpretación del significado de cada teorema.

Ejemplo 2.29. *Con base en el conjunto de premisas*

1) $\sim P \to \sim Q$	*2)* $S \to R$
3) $T \to \sim P$	*4)* $S \vee T$

Deducir la conclusión $\sim Q \vee R$. *En este punto es necesario convenir que no hay un único camino para obtener la conclusión, además se pueden utilizar todos los pasos que sean necesarios, así alguien puede hacer uso de la propiedad transitiva entre las premisas 1 y 3, otra persona interpreta correctamente que entre las premisas 2, 3 y 4 existe un método de casos, o tal vez que que la hipótesis 4* $S \vee T$ *se puede escribir como el condicional* $\sim T \to S$ *para luego hacer un silogismo con la hipótesis 2, en fin, son muchos los caminos, veamos otra alternativa*

1. $\sim P \to \sim Q$	... *Hipótesis*
2. $S \to R$	... *Hipótesis*
3. $T \to \sim P$	... *Hipótesis*
4. $S \vee T$	... *Hipótesis*
5. $\sim(\sim Q) \to \sim(\sim P)$	... *Contrarrecíproco en 1*
6. $Q \to P$	... *Doble negación en 5*
7. $R \vee \sim P$	... *Método de casos entre 2,3 y 4*
8. $\sim P \vee R$	... *Conmutativa en 7*
9. $P \to R$	... *Definición de condicional en 8*
10. $Q \to R$	... *Transitividad entre 6 y 9*
11. $\sim Q \vee R$	... *Definición de condicional en 10*

Así la conclusión se sigue y el razonamiento es válido dentro del sistema formal que se ha construido.

Ejemplo 2.30. *Se tiene el conjunto de premisas*

1) $x = y \to x \not< y$	*2)* $y = 0 \leftrightarrow x \not< y$
3) $(x = 0 \vee xy = 0) \to y = 0$	*4)* $(x = y \to y = 0) \to x = 0$

Cuya conclusión es $\sim(x < y \wedge x = 1)$. *En este caso se está utilizando una serie de símbolos matemáticos los cuales se pueden cambiar para obtener el lenguaje proposicional trabajado hasta este punto, se simboliza* $x = y$ *como* P, $Q : x < y$ *de donde* $\sim P : x \not< y$, $R : y = 0$, $S : x = 0$, $T : xy = 0$, $U : x = 1$ *y la conclusión queda escrita como* $\sim(Q \wedge U)$, *nótese que dentro del conjunto de hipótesis no está la proposición* $U : x = 1$, *es por ello que ésta debe surgir de una adjunción. De acuerdo con esta nueva simbolización se tiene la deducción.*

1. $P \to \sim Q$	*...Hipótesis*
2. $R \leftrightarrow \sim Q$	*...Hipótesis*
3. $(S \vee T) \to R$	*...Hipótesis*
4. $(P \to R) \to S$	*...Hipótesis*
5. $R \to \sim Q \wedge \sim Q \to R$	*...Definición de bicondicional en 2*
6. $\sim Q \to R$	*...Simplificación en 5*
7. $P \to R$	*...Transitividad entre 1 y 6*
8. S	*...Modus ponendo ponens entre 4 y 7*
9. $S \vee T$	*...Adjunción en 8*
10. R	*...Modus ponendo ponens entre 3 y 9*
11. $R \to \sim Q$	*...Simplificación en 5*
12. $\sim Q$	*...Modus ponendo ponens entre 10 y 11*
13. $\sim Q \vee \sim U$	*...Adjunción en 12*
14. $\sim (Q \wedge U)$	*...Ley D'Morgan en 13*

Se logra concluir así que $\sim (Q \wedge U)$ *es una proposición verdadera y por ende su equivalente* $\sim (x < y \wedge x = 1)$.

Ejemplo 2.31. *Para el conjunto de premisas*

1. $\sim (y - x = 2 \vee x + y \not> 8)$
2. $\sim (x > y \vee y < 5)$
3. $x = 2 \to x + y \not> 8$

Se desprende la conclusión $\sim (x = 2 \vee y < 5)$, *para ello se hará la simbolización en términos de proposiciones como* $P : y - x = 2$, $Q : x + y > 8$, $R : x > y$, $S : y < 5$ *y* $T : x = 2$, *la deducción se plantea a continuación*

1. $\sim (P \vee \sim Q)$	*...Hipótesis*
2. $\sim (R \vee S)$	*...Hipótesis*
3. $T \to \sim Q$	*...Hipótesis*
4. $\sim P \wedge \sim (\sim Q)$	*...Ley D'Morgan en 1*
5. $\sim P \wedge Q$	*...Doble negación en 4*
6. $\sim R \wedge \sim S$	*...Ley D'Morgan en 2*
7. $\sim S$	*...Simplificación en 6*
8. Q	*...Simplificación en 5*
9. $\sim (\sim Q) \to \sim T$	*...Contrarrecíproco en 3*
10. $Q \to \sim T$	*...Doble negación en 9*

11. $\sim T$	*... Modus ponendo ponens entre 8 y 10*
12. $\sim T \wedge \sim S$	*... Conjunción entre 11 y 7*
13. $\sim (T \vee S)$	*... Ley D'Morgan en 12*

Lo que permite concluir que la proposición $\sim (x = 2 \vee y < 5)$ *es verdadera con base en las premisas dadas.*

Ejemplo 2.32. *En algunas situaciones es posible obtener una conclusión que sea falsa, es decir, que represente una contradicción (los valores de verdad sean todos falsos), así el razonamiento sea válido a raíz del sistema formal construido. Una de las contradicciones clásicas en el estudio de las matemáticas es* $P \wedge \sim P$*, esto independiente del valor de verdad de* P*. Para ver esta situación consideremos el conjunto de premisas*

1. $(S \rightarrow P) \rightarrow Q$
2. $\sim (\sim S \wedge Q)$
3. $\sim S$

Bajo este conjunto de hipótesis es posible aplicar el siguiente razonamiento

1. $(S \rightarrow P \rightarrow Q)$	*... Hipótesis*
2. $\sim (\sim S \wedge Q)$	*... Hipótesis*
3. $\sim S$	*... Hipótesis*
4. $\sim (\sim S) \vee \sim Q$	*... Ley D'Morgan en 2*
5. $S \vee \sim Q$	*... Doble Negación en 4*
6. $\sim Q$	*... Modus tolendo ponens entre 3 y 5*
7. $\sim Q \rightarrow \sim (S \rightarrow P)$	*... Contrarrecíproco en 1*
8. $\sim (S \rightarrow P)$	*... Modus ponendo ponens entre 6 y 7*
9. $S \wedge \sim P$	*... Ley D'Morgan en 8*
10. S	*... Simplificación en 9*
11. $S \wedge \sim S$	*... Conjunción entre 3 y 10*

El razonamiento es válido de acuerdo con el sistema formal y la conclusión representa una contradicción dada por $S \wedge \sim S$*.*

Hipótesis	Conclusión
1. $T \rightarrow P$	
2. $R \rightarrow S$	$T \rightarrow (\sim P \rightarrow S)$
3. $\sim (\sim R \wedge \sim T)$	

1. $T \rightarrow P$	...Hipótesis
2. $R \rightarrow S$	...Hipótesis
3. $\sim (\sim R \wedge \sim T)$	...Hipótesis
4. $\sim (\sim R) \vee \sim (\sim T)$	...Ley D'Morgan en 3
5. $\sim (\sim T) \vee \sim (\sim R)$	...Conmutativa en 4
6. $\sim (\sim T) \vee R$	...Doble negación en 5
7. $\sim T \rightarrow R$	...Definición de condicional en 6
8. $\sim T \rightarrow S$	...Transitividad entre 2 y 7
9. $\sim P \rightarrow \sim T$	...Contrarrecíproco en 1
10. $\sim P \rightarrow S$	...Transitividad entre 8 y 9
11. $(\sim P \rightarrow S) \vee \sim T$	...Axioma de adjunción en 10
12. $\sim T \vee (\sim P \rightarrow S)$	...Conmutativa en 11
13. $T \rightarrow (\sim P \rightarrow S)$	...Definición de condicional en 12

Hipótesis	Conclusión
1. $P \wedge \sim Q$	
2. $P \rightarrow \sim R$	$\sim (R \vee S)$
3. $Q \vee \sim S$	

1. $P \wedge \sim Q$	...Hipótesis
2. $P \rightarrow \sim R$	...Hipótesis
3. $Q \vee \sim S$	...Hipótesis
4. P	...Simplificación en 1
5. $\sim R$	...Modus ponendo ponens entre 2 y 4
6. $\sim Q \rightarrow \sim S$	...Definición de condicional en 3
7. $\sim Q$	...Simplificación en 1
8. $\sim S$	...Modus ponendo ponens entre 6 y 7
9. $\sim R \wedge \sim S$	...Conjunción entre 5 y 8
10. $\sim (R \vee S$	...Conjunción entre 5 y 8

Hipótesis	Conclusión
$\sim R \rightarrow Q$	
$T \rightarrow \sim Q$	$(T \vee \sim S) \rightarrow R$
$\sim S \rightarrow \sim Q$	

1. $\sim R \to Q$ . . . Hipótesis
2. $T \to \sim Q$ . . . Hipótesis
3. $\sim S \to \sim Q$ . . . Hipótesis
4. $(T \vee \sim S) \to (\sim Q \vee \sim Q)$ . . . Adición entre implicaciones entre 2 y 3
5. $(T \vee \sim S) \to \sim Q$ . . . Idempotencia en 4
6. $\sim Q \to \sim (\sim R)$ . . . Contrarrecíproco en 1
7. $\sim Q \to R$ . . . Doble negación en 6
8. $(T \vee \sim S) \to R$ . . . Transitividad entre 5 y 7

2.6. Ejercicios

1. Verifique mediante las reglas de inferencia, las definiciones y teoremas, si el razonamiento es o no válido. Justifique cada paso.

Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
1. $P \vee (Q \wedge R)$ 2. $\sim (Q \wedge R)$ 3. $P \to T$	T	1. W 2. $W \to (P \to Q)$ 3. P	$Q \vee R$
Hipótesis	**Conclusión**	**Hipótesis**	**Conclusión**
1. $(P \to Q) \to R$ 2. $\sim R \vee S$ 3. $\sim (P \wedge \sim Q)$ 4. $(S \vee T) \to A$	A	1. $\sim (T \wedge \sim N)$ 2. $\sim (S \wedge P) \vee \sim P$ 3. $\sim [(\sim F \wedge \sim F) \vee \sim N]$ 4. $\sim N \to (S \wedge P)$	$\sim (T \vee P) \wedge F$
Hipótesis	**Conclusión**	**Hipótesis**	**Conclusión**
1. $W \to \sim Z$ 2. $(\sim Z \vee T) \to L$ 3. $M \to \sim L$ 4. $\sim W \to \sim Z$	$\sim M$	1. $T \to P$ 2. $R \to S$ 3. $\sim (\sim R \wedge \sim T)$	$T \to (\sim P \to S)$

2. En cada uno de los siguientes problemas, identifique premisas y conclusión; traduzca a la forma simbólica, y empleando las reglas de inferencia, las definiciones y teoremas; así mismo, establezca para cada argumento si es o no válido. Intente, inicialmente, analizar el razonamiento sin recurrir a la representación simbólica.

   a) Si llueve entonces iré al cine. Llueve. Luego, iré al cine.

   b) Si llueve entonces iré al cine. No llueve. Luego, no iré al cine.

c) Si me caigo de la bicicleta, me golpearé. Estoy golpeado; luego, me caí de la bicicleta.

d) Si voy al colegio pasaré por la biblioteca. Si paso por la biblioteca consultaré el diccionario de sinónimos. Voy al colegio; luego, consulté el diccionario de sinónimos.

e) Para que valga la pena tomarlo, es suficiente que sea un excelente curso. O las calificaciones son justas o no vale la pena tomar el curso. Las calificaciones no son justas. Luego, no es un excelente curso.

f) Para que el candidato llegue a la presidencia es necesario que gane las elecciones en el departamento. El ganará las elecciones en el departamento únicamente si defiende los derechos civiles. El no defenderá los derechos civiles. Por tanto, el candidato no llegará a la presidencia.

g) Si los precios son bajos, entonces los salarios son bajos. Los precios son bajos o no hay control de precios. Si no hay control de precios, entonces hay inflación. No hay inflación; por tanto, los salarios son bajos.

h) La lógica es fácil o le gusta a los estudiantes. Si las matemáticas son difíciles entonces la lógica no es fácil. Por tanto, si a los estudiantes no les gusta la lógica, las matemáticas no son difíciles.

i) Si no me motilo, entonces me quedaré en casa. Voy al cine. Por tanto, me motilé.

j) Si el partido A gana las elecciones, tendrá mayoría en el Congreso. Si tiene mayoría en el Congreso, el presidente podrá cumplir el programa de gobierno propuesto. O el presidente no podrá cumplir el programa propuesto o la oposición lo atacará duramente. Pero la oposición no lo atacará duramente. Luego, el partido A no ganará las elecciones.

k) Si este polígono es cóncavo, entonces es escaleno. Si este polígono es inscribible, entonces es regular. Si este polígono es escaleno, no es regular. Si este polígono no es inscribible, entonces no es equilátero o no es equiángulo. Este polígono es equilátero y equiángulo. Por tanto, este polígono no es cóncavo.

l) Si asisto al colegio conversaré con mis amigos. Luego, si no voy al colegio, entonces no conversaré con mis amigos.

m) Voy al estadio o me quedo en casa. Si voy al estadio entonces dormiré en la casa de mi hermano. No me quedé en casa. Luego, dormí en la casa de mi hermano.

n) Carlos aprobó el examen de matemáticas y ocupó el primer puesto en biología. Si Felipe no aprobó el examen de matemáticas, entonces Carlos no ocupó el primer puesto en biología. Si Felipe aprobó el examen de matemáticas, entonces aprobó el año. Luego, Carlos aprobó el examen de matemáticas y Felipe aprobó el año.

ñ) Si Nacional ganó el campeonato, entonces Junior fue el segundo o América fue el segundo. Si Junior fue el segundo, entonces Nacional no ganó el campeonato. Si Tolima fue el segundo, entonces América no fue el segundo. Nacional ganó el campeonato. Luego, Tolima no fue el segundo.

o) Si tengo razón, entonces estoy loco. Pero si estoy loco, entonces tengo razón. Por tanto, no estoy loco.

p) Si el tiempo mejora, entonces la agricultura se recupera. Si la reforma agraria demora, entonces la agricultura no se recupera. El tiempo mejora y el período termina.

q) Si la reforma agraria no demora, el plan agrario se cumple. Luego, el período termina y el plan agrario se cumple.

r) Si la actividad progresa, entonces los problemas se agravarán. Si el Congreso sesiona, las reformas se aprobarán. Las reformas no se aprueban. Luego, el Congreso no sesiona o la inactividad no progresa.

3. Escriba una deducción formal de cada uno de los razonamientos siguientes a partir de las premisas enumeradas en cada caso

Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
1. $R \wedge S$ 2. $Q \rightarrow (\sim S \vee \sim R)$ 3. $U \vee W$ 4. $U \rightarrow \sim P$ 5. $W \rightarrow \sim P$	$\sim (P \vee Q)$	1. $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x > 1$ 2. $x^2 < 4 \rightarrow x \leq 1$ 3. $x = 2 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ 4. $x = 3 \rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ 5. $x = 2 \vee x = 3$ 6. $x^2 \geq 4 \rightarrow (x^2 = 4 \vee x^2 > 4)$	$x^2 = 4 \vee x^2 > 4$

4. Construya un argumento válido en el que tanto las premisas como la conclusión sean verdaderas.

5. Pruebe que los siguientes conjuntos de premisas son inconsistentes concluyendo una contradicción para cada uno, ver ejemplo 2.32

Premisas	Premisas	Premisas
1. $\sim Q \rightarrow R$ 2. $\sim R \vee S$ 3. $\sim (P \vee Q)$ 4. $\sim P \rightarrow \sim S$	1. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ 2. Q 3. $\sim P \rightarrow R$ 4. $\sim S \wedge \sim R$	1. $R \rightarrow (R \wedge Q)$ 2. $\sim S \vee R$ 3. $\sim T \vee \sim Q$ 4. $S \wedge T$
Premisas		**Premisas**
1. $Q \rightarrow P$ 2. $\sim (P \vee R)$ 3. $Q \vee R$		1. $T \vee \sim R$ 2. $\sim (R \rightarrow S)$ 3. $T \rightarrow S$

6. Construya un argumento inválido en el que tanto las premisas como la conclusión sean proposiciones verdaderas.

7. Deduzca la conclusión a partir del conjunto de hipótesis que se dan

Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
$P \to (Q \vee R)$ $\sim (P \to Q)$	R	$\sim P \to \sim Q$	$(P \to Q) \to (Q \to P)$
Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
$\sim Q \to \sim R$ $\sim (Q \wedge T)$	$\sim (R \wedge T)$	$\sim P \vee R \to S \wedge \sim Q$ Q	$\sim R$
Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
$P \to (Q \vee R)$ $\sim Q$	$P \to R$	$P \to (Q \to R)$	$P \wedge Q \to R$
Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
$\sim R \vee \sim S$ $Q \to S$	$R \to \sim Q$	$P \to (Q \wedge R)$	$P \to Q$
Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
$\sim P \to R$ $\sim S \to (\sim P \wedge \sim R)$	S	$P \wedge \sim Q$	$\sim (P \leftrightarrow Q)$
Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
$P \to \sim Q$ $P \vee R$ $R \to \sim Q$ $T \to Q$ S	$\sim (T \leftrightarrow S)$	$\sim (P \vee \sim R)$ $Q \vee P$ $R \to S$ $Q \wedge S \to T \wedge S$	$S \wedge T$
Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
$R \to S$ $S \to Q$ $R \vee (\sim S \wedge \sim T)$	$S \vee T \to Q$	$(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$	$[P \wedge (Q \vee R)] \vee [(P \vee Q) \wedge Q]$

2.7. Resumen Conceptual

1. **Proposición**: Enunciado que admite un único valor de verdad: Verdadero (V) o falso (F), se denotan con letras mayúsculas o minúsculas o por medio de índices P, p, P_n.

2. **Negación de una proposición**: Es la proposición que se obtiene al anteponer el operador no, la negación cambia el valor de verdad de la proposición, se escribe $\sim P$.

3. **Posibilidades lógicas**: Combinaciones de los posibles valores de verdad de n proposiciones, en cuyo caso hay 2^n posibilidades lógicas.

4. **Conectores**: Son los enlaces entre proposiciones se hace uso de los conectores $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.

5. **Proposición simple**: Cuando aparece una y solo una proposición.

6. **Proposición compuesta**: Cuando existen dos o más proposiciones unidas con un conector o más.

7. **Disjunción**: Es la proposición compuesta resultante al unir dos proposiciones con el conector $\vee$, se escribe $P \vee Q$.

8. **Tabla de verdad**: Es la tabla que indica el valor de verdad de una proposición compuesta de acuerdo con los conectores implicados y las posibilidades lógicas.

9. **Conjunción**: Es la proposición compuesta resultante al unir dos proposiciones con el conector $\wedge$, se escribe $P \wedge Q$.

10. **Condicional**: Es la proposición compuesta resultante al unir dos proposiciones con el conector $\rightarrow$, se escribe $P \rightarrow Q$. A P se le llama hipótesis y a Q tesis.

11. **Implicación**: Es un condicional cuyos valores de verdad son verdaderos independientes de los valores de las proposiciones simples P, Q, se escribe $P \Rightarrow Q$.

12. **Recíproco**: Es el condicional $Q \rightarrow P$ asociado a $P \rightarrow Q$.

13. **Contrario**: Es el condicional $\sim P \rightarrow \sim Q$ asociado a $P \rightarrow Q$.

14. **Contrarrecíproco**: Es el condicional $\sim Q \rightarrow \sim P$ asociado a $P \rightarrow Q$.

15. **Condición necesaria pero no suficiente**: Cuando la condición es indispensable para la realización de un acontecimiento, pero no basta.

16. **Condición suficiente pero no necesaria**: Cuando la condición basta, pero no es indispensable para la realización de un acontecimiento.

17. **Condición necesaria y suficiente**: Cuando la condición basta y es indispensable para que se realice un acontecimiento.

18. **Bicondicional**: Es la proposición compuesta resultante al unir dos proposiciones con el conector $\leftrightarrow$, se escribe $P \leftrightarrow Q$.

19. **Tautología**: Es una proposición compuesta verdadera independientes del valor de verdad de las proposiciones simples.

20. **Contradicción**: Es una proposición compuesta falsa independiente de los valores de verdad de las proposiciones simples.

21. **Indeterminación**: Es una proposición compuesta que no es ni verdadera ni falsa para todos los valores de verdad.

22. **Circuitos lógicos**: Es una forma de representación de una proposición compuesta a partir de circuitos eléctricos, los conectores en paralelo se representan como una disjunción y en serie con una conjunción.

23. **Diagrama de flujos**: Es la representación de los diferentes caminos en que una determinada información se dirige entre dos terminales.

24. **Definición de conjunción**: $P \wedge Q$ equivale a $\sim(\sim P \vee \sim Q)$.

25. **Definición de condicional**: $P \rightarrow Q$ equivale a $\sim P \vee Q$.

26. **Definición de bicondicional**: $P \leftrightarrow Q$ equivale a $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$.

27. **Axioma de idempotencia**: $P \vee P \rightarrow P$ es una proposición verdadera.

28. **Axioma de adjunción**: $P \rightarrow P \vee Q$ es una proposición verdadera.

29. **Axioma de conmutatividad**: $P \vee Q \rightarrow Q \vee P$ es una proposición verdadera.

30. **Adición a la implicación**: $(P \rightarrow Q) \rightarrow (R \vee P \rightarrow R \vee Q)$ es una proposición verdadera.

31. **Modus ponendo ponens**: Si $P \rightarrow Q$ y P son proposiciones verdaderas entonces Q es verdadera.

32. **Sustitución**: Si $P \leftrightarrow Q$ entonces se puede sustituir P por Q o viceversa.

33. **Transitividad**: Si $P \rightarrow Q$ y $Q \rightarrow R$ son proposiciones verdaderas entonces $P \rightarrow R$ también lo es.

34. **Medio Excluido**: $P \rightarrow P$, $\sim P \vee P$ y $P \vee \sim P$ son proposiciones verdaderas.

35. **Conjunción**: Si P y Q son verdaderos entonces $P \wedge Q$ también lo es.

36. **Doble negación**: $P \leftrightarrow \sim(\sim P)$ es una proposición verdadera.

37. **Contrarrecíproco**: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$ es una proposición verdadera

38. **Simplificación**: Si $P \wedge Q$ es verdadera entonces P es verdadera y Q es verdadera.

39. **Conmutativa**: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$ y $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$

40. **Equivalencia**: $P \leftrightarrow P$, $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$ y $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (\sim Q \leftrightarrow \sim P)$ son proposiciones verdaderas.

41. **Idempotencia**: $P \vee P \leftrightarrow P$ y $P \wedge P \leftrightarrow P$ son proposiciones verdaderas.

42. **Adición entre implicaciones**: Si $P \rightarrow Q$ y $R \rightarrow S$ son proposiciones verdaderas entonces $P \vee R \rightarrow Q \vee S$ y $P \wedge R \rightarrow Q \wedge S$ son proposiciones verdaderas.

43. **Método de casos**: Si $P \vee Q$, $P \rightarrow R$ y $Q \rightarrow S$ son verdaderas así lo será $R \vee S$.

44. **Modus tolendo ponens**: Si $P \vee Q$ y $\sim P$ son verdaderos entonces Q es verdadero.

45. **Modus tolendo tolens**: Si $P \rightarrow Q$ y $\sim Q$ son verdaderas entonces $\sim P$ es verdadera.

46. **Ley D'Morgan**: $\sim (P \vee Q) \leftrightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$, $\sim (P \wedge Q) \leftrightarrow (\sim P \vee \sim Q)$ y $\sim (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge \sim Q)$ son proposiciones verdaderas.

47. **Asociativa**: $[P \vee (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \vee R]$ y $[P \wedge (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \wedge R]$ son proposiciones verdaderas.

48. **Distributiva**: $[P \vee (Q \wedge R)] \leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$ y $[P \wedge (Q \vee R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$ son proposiciones verdaderas.

Capítulo 3

Lógica Cuantificacional

3.1. Nociones Preeliminares

Una oración es una expresión de juicio que se compone de un **sujeto** y un **predicado**, el sujeto es aquello a lo que se hace referencia como una persona, un objeto, un animal, etc. se denotarán con letras latinas minúsculas; mientras que el predicado es la acción que efectúa el sujeto o una característica del mismo, se denotarán con letras latinas mayúsculas. Los sujetos pueden ser constantes o variables, son constantes cuando se hace referencia a un sujeto particular y variables es cuando hace alusión a generalidades o conjuntos.

Para denotar una oración se escribe primero el predicado y luego el sujeto como un subíndice del mismo: P_x o P_a en el primero se hará referencia a los predicados cuyos sujetos son variables en dicho caso se llamará **Función proposicional** haciendo alusión a que el predicado está ligado al sujeto variable x. Para la segunda notación P_a el sujeto es una constante denotada por a. Si el predicado depende de dos sujetos se escribe P_{xy} o P_{ab}.

Las oración son solo expresiones más no proposiciones, es decir, no necesariamente deben poseer un valor de verdad, en el caso en que las funciones proposicionales asuman el valor de un sujeto constante, lo cual se llamará **Individualización** o **Ejemplificación**, la oración resultante será una proposición, por ejemplo, en el caso en que se tenga la función proposicional P_x, una individualización aplicable es P_a, es decir, la variable x asume el valor de a, lo cual se es posible escribirlo como $(a/x)(P_a)$ haciendo alusión a esta misma individualización.

Ejemplo 3.1. *En la oración "El cielo es azul" el sujeto que denotaremos c está representado por el cielo,* c : *Cielo, mientras que el predicado es la característica, es decir, ser azul, se escribe* A : *Azul y la oración puede ser representada en términos de la lógica proposicional como* A_c*. En este caso no se le puede dar un valor de verdad a la oración* A_c*, ya que depende de las condiciones climáticas, de la posición del observador, o de la hora.*

Las funciones proposicionales son susceptibles de ser cuantificadas, es decir, es posible determinar que todos los posibles valores de la variable x cumplan la función proposicional P_x, en este caso se habla del **Cuantificador Universal** el cual se escribe como $\forall$ y se lee **para todo**, se escribe $(\forall x)(P_x)$ para indicar que todos los x asumen el valor de la función proposicional.

En el caso en que algunos de los elementos x de la variable produzcan que P_x es verdadera, pero no todos, entonces se hará alusión al **Cuantificador Existencial**, denotado como $\exists$ y se lee **existe**, así $(\exists x)(P_x)$ indica que algunos de las x satisfacen la función proposicional P_x. Se dijo anteriormente que las funciones proposicionales no son proposiciones, sin embargo al ser cuantificadas, sea por bajo el cuantificador universal o existencial, se transforma en una proposición la cual tiene un valor de verdad. Los valores posibles que puede tomar la variable x en las expresiones $(\forall x)(P_x)$ y $(\exists x)(P_x)$ se le llama **Dominio de Referencia**, el cual puede ser un conjunto de personas, objetos, números u otros objetos, esto depende de la naturaleza de los sujetos.

Ejemplo 3.2. *Consideremos la oración "Existen letras que no son vocales". En este caso el sujeto son las x : letras, el cual es un sujeto variable ya que x puede asumir cualquiera de los veintiseis caracteres que conforman el alfabeto latino el cual constituye el dominio de referencia. Por su parte el predicado se asumirá como P : "son vocales" y la negación le corresponde a la función proposicional como sigue $(\exists x)(\sim P_x)$, oración que es verdadera ya que las letras m, n, r son algunas de las que no son vocales. La oración original es equivalente a "No todas las letras son vocales" la cual se puede escribir como $\sim (\forall x)(P_x)$, y así se presenta la equivalencia $(\exists x)(\sim P_x) \leftrightarrow \sim (\forall x)(P_x)$, propiedad que induce el teorema 3.4.*

Ejemplo 3.3. *Para la oración "Todo número positivo es mayor que cero" se puede encontrar una expresión equivalente la cual se escribe como "Para todo número, si el número es positivo entonces el número es mayor que cero", en esta última expresión se puede identificar un cuantificador en este caso universal, se encuentra un sujeto "x:número" el cual es variable (dominio de referencia en los reales), dos predicados, el primero es ser positivo "P:Positivo" y el segundo ser mayor que cero "M:Mayor que cero", además tiene la estructura de un condicional ya que aparece el conector si ... entonces ...; con base en esto la oración se representa como $(\forall x)(P_x \rightarrow M_x)$. En el caso en que $x = 5$ se tiene la proposición $P_5 \rightarrow M_5$ la cual es verdadera.*

En el ejemplo 3.3 la proposición $(\forall x)(P_x \rightarrow M_x)$ (1) se hizo que la variable x asumiera el valor de 5 es decir se sustituyó x por 5 lo cual se escribe como $(5/x)$ para indicar este cambio, lo que produce una proposición verdadera, este procedimiento es la **Ejemplificación Universal**. Sin embargo, la proposición (1) puede asumir otros valores compuestos como el caso de una suma o una multiplicación, así para $(3 + 2/x)$ resulta la proposición $P_{3+2} \to M_{3+2}$ y $P_{4\cdot 3} \to M_{4\cdot 3}$ surge cuando la variable x toma el valor de $4 \cdot 3$ que se escribe como $(4 \cdot 3/x)$.

Ejemplo 3.4. *En la oración "Para todo x, y, z, si x es mayor o igual que y y y es mayor z entonces x es mayor que z" se identifican tres sujetos variables y además tres cuantificadores ligados a las tres variables x, y y z en dicho caso se escribe como*

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \geq y \wedge y > z) \to x > z)$$

Esta proposición representa una propiedad transitiva respecto de la relación de orden, al hacer la individualización deben tomarse tres elementos uno por cada cuantificador. El dominio de referencia son nuevamente los números reales esto para cada una de las variables.

Se procede de forma inductiva para ejemplificar la proposición

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \geq y \wedge y > z) \to x > z)$$

obtenida en el ejemplo 3.4, en el caso en que x asuma el valor de 5, $(5/x)$ resulta la proposición $(\forall y)(\forall z)((5 \geq y \wedge y > z) \to 5 > z)$, tomemos ahora la ejemplificación $(3/y)$ para tener la proposición ligada a la variable z $(\forall z)((5 \geq 3 \wedge 3 > z) \to 5 > z)$ y si se asume la ejemplificación $(-1/z)$ resulta la proposición

$$(5 \geq 3 \wedge 3 > -1) \to 5 > -1$$

La cual es verdadera. Este procedimiento inductivo, es decir, cuantificador a cuantificador se puede resumir como

1. $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \geq y \wedge y > z) \to x > z)$ ...Premisa
2. $(5 \geq 3 \wedge 3 > -1) \to 5 > -1$ ...$(5/x)(3/y)(-1/z)$ en 1

Ejemplo 3.5. *Consideremos que la proposición $(\forall x)(x^2 \geq 1)$ (1) es verdadera asumiendo que el dominio de referencia son todos los números reales. Si hacemos que $x = \frac{1}{2}$ entonces al ejemplificar la proposición (1) resulta $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 1$ equivalente a $\frac{1}{4} \geq 1$ lo cual es en sí una contradicción, así la proposición $(\forall x)(x^2 \geq 1)$ es falsa ya que se encontró un caso $x = \frac{1}{2}$ en que la función proposicional $P_x : x^2 \geq 1$ es falsa; este procedimiento se llama **Contraejemplo**. En el caso en que se modifique el dominio de referencia para todos los reales mayores o iguales que 1, la proposición $(\forall x)(x^2 \geq 1)$ es ya verdadera.*

Con base en el ejemplo 3.5 se sigue que un contraejemplo consiste en exhibir un caso en el que la función proposicional no sea verdadera, esto ligado al cuantificador que le precede a dicha función proposicional, ya que la proposición $(\exists x)(x^2 \geq 1)$ es verdadera puesto que si $x = 3$ entonces $3^2 \geq 1$ y así existe un número que produce que P_x sea verdadera. La proposición $(\exists x)(x^2 \leq -2)$ es falsa ya que ningún número real elevado al cuadrado es negativo, así el contrajemplo no solo depende de la función proposicional sino también del cuantificador asociado a éste.

Ejemplo 3.6. *Consideremos el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ el cual servirá como dominio de referencia, es decir, las variables x e y asumirán cualquiera de los cuatro números que conforman el conjunto A. La proposición $(\forall x)(\exists y)(x^2 < y^2)$ es falsa, para ello se inicia con cada términos, así si $x = 1$ entonces existe $y = 2$ en A tal que $1^2 < 2^2$, si $x = 2$ entonces $y = 3$, si $x = 3$ existe $y = 4$, pero si $x = 4$ no existe ningún y en el conjunto A tal que $4^2 < y^2$, como uno de los números falla entonces no es cierto que se cumple para todos los x en A.*

La proposición $(\exists x)(\exists y)(x^2 - y = 0)$ es verdadera ya que existen dos números $x = 2$ y $y = 4$ en A tal que $x^2 - y = 4 - 4 = 0$. Mientras que la proposición $(\forall x)[\sim (\exists y)(x^2 + 1 = y^2)]$ es falsa, puesto que si $x = 1$ entonces $x^2 + 1 = 1 + 1 = 2$ y no existe en A un número tal que $2 = y^2$.

En los siguientes ejemplos se explicará el papel de las inferencias dentro de la lógica cuantificacional, para ello es necesario recurrir al hecho que en las ejemplificación de una función proposicional es una proposición y por tanto es posible hacer uso de las propiedades de la lógica proposicional estudiadas en el capítulo precedente.

Ejemplo 3.7. *Consideremos un conjunto de premisas dados por*

1. *Todo número real es positivo o es negativo o es cero.*
2. *4 no es un número negativo.*
3. *4 no es cero.*

En este caso es posible establecer una conclusión la cual es "4 es un número positivo". Veamos como a través de la lógica proposicional se puede validar dicha conclusión.

En la primer premisa se pueden identificar tres predicados "P:Positivo", "N:Negativo" y "C:Cero", por tanto esta premisa se puede escribir en términos de lógica cuantificacional como $(\forall x)(P_x \vee M_x \vee C_x)$ que por la propiedad asociativa de la lógica proposicional se escribe como $(\forall x)((P_x \vee N_x) \vee C_x)$. Con base en los predicados antes definidos, las dos premisas restantes se escriben como $\sim N_4$ y $\sim C_4$; por lo tanto se tiene

1. $(\forall x)((P_x \vee N_x) \vee C_x)$	*...Premisa*
2. $\sim N_4$	*...Premisa*
3. $\sim C_4$	*...Premisa*

La primer premisa puede ser ejemplificada si hacemos que $x = 4$ *en cuyo caso se tiene la proposición* $(P_4 \vee N_4) \vee C_4$*, se escribe*

4. $(P_4 \vee N_4) \vee C_4$ $\ldots (4/x)$ *en 1*

En 2, 3 y 4 se tienen proposiciones, es por ello que se puede hacer uso del sistema formal de la lógica proposicional como es el modus tolendo ponens, veamos

5. $P_4 \vee N_4$ ... *Modus tolendo ponens entre 3 y 4*
6. P_4 ... *Modus tolendo ponens entre 2 y 5*

Así en el paso 6 *se tiene la proposición* P_4 *que se traduce en lenguaje natural como* 4 *es positivo.*

El ejemplo anterior indica el camino a seguir en el momento de resolver ejercicios de inferencia en términos de cuantificadores, para ello se hacen primero las ejemplificaciones necesarias para luego hacer uso de las propiedades de la lógica proposicional. El siguiente ejemplo es tomado del libro introducción a la lógica matemática, ver la referencia [19].

Ejemplo 3.8. *Las premisas que se enumeran a continuación tienen por dominio de referencia a los números enteros.*

1. *Para cada* x*, si* x *es un número par, entonces* $x + 4$ *es un número par.*
2. *Para cada* x*, si* x *es un número par, entonces* x *no es un número impar.*
3. *Dos es un número par.*

Son verdaderas, en este caso la conclusión que se sigue es que "$2 + 4$ *no es un número impar". Para escribir en el lenguaje de la lógica cuantificacional inducida hasta este punto, se asumirá que* D *es el predicado "número par" e* I *el predicado "número impar", es por ello que las premisas dadas en lenguaje natural se escriben como*

1. $(\forall x)(E_x \to E_{x+4})$ ... *Hipótesis*
2. $(\forall x)(E_x \to \sim I_x)$ ... *Hipótesis*
3. E_2 ... *Hipótesis*

La clave está ahora en como hacer la ejemplificación para los dos cuantificadores que se presentan, ya que la tesis contiene al sujeto constante $2+4$ *y en la primer hipótesis está el sujeto variable* $x + 4$ *entonces se hace necesario que* $x = 2$*. Posteriormente para ligar las ejemplificaciones producto de la primer y segunda hipótesis se requiere que* $x = 2 + 4$ *para la segunda hipótesis, así*

4. $E_2 \rightarrow E_{2+4}$ ... $(2/x)$ *en 1*
5. $E_{2+4} \rightarrow \sim I_{2+4}$ ... $(2+4/x)en2$

Ahora bien es posible hacer uso de los elementos del sistema formal de la lógica proposicional para tener

6. $E_2 \rightarrow \sim I_{2+4}$ ... *Transitividad entre 4 y 5*
7. $\sim I_{2+4})$ ... *Modus ponendo ponens entre 3 y 6*

Como se obtiene la conclusión $\sim I_{2+4}$ *entonces se concluye que* $2+4$ *no es un número impar que era el propósito.*

Ejemplo 3.9. *Consideremos que el dominio de referencia es el conjunto de números enteros. Para las premisas*

1. *Para cada* x*, si* x *es divisible por* 6 *entonces* x *es divisible por* 2
2. *Para cada* x*, si* x *es divisible por* 2 *entonces* x^2 *es divisible por* 2.

Una posible conclusión que se puede obtener es que "Para cada x*, si* x *es divisible por* 6 *entonces* x^2 *es divisible por* 2*". Implícitamente se está utilizando la propiedad de transitividad o silogismo hipotético para la obtener dicha tesis, sin embargo, no es propiamente dicha propiedad por que cada premisa contiene el cuantificador universal.*

Denotemos a S *y* D *como los predicados "Divisible por 6" y "Divisible por 2" de forma respectiva, entonces las premisas se escribe como*

1. $(\forall x)(S_x \rightarrow D_x)$ ... *Hipótesis*
2. $(\forall x)(D_x \rightarrow D_{x^2})$ ... *Hipótesis*

A continuación hacemos uso de la ejemplificación universal, en cuyo caso se hará que x *asuma el valor de* b *el cual es la representación de cualquiera de los sujetos que cumplan las funciones proposicionales* $P_x : S_x \rightarrow D_x$ *y* $Q_x : D_x \rightarrow D_{x^2}$*, así*

3. $S_b \rightarrow D_b$ ... (b/x) *en 1*
4. $D_b \rightarrow D_{b^2}$ ... (b/x) *en 2*

Como en los pasos 3 *y* 4 *se obtienen proposiciones entonces es posible aplicar la propiedad de transitividad para tener*

5. $S_b \to D_{b^2}$ *. . . Transitividad entre 3 y 4*

*Ya que el sujeto b es arbitrario, entonces la proposición $S_b \to D_{b^2}$ obtenida en el paso 5 es posible extenderla a todos los x del dominio de referencia, dicha propiedad se denomina **Generalización Universal** y por tanto*

6. $(\forall x)(S_x \to D_{x^2})$ *. . . Generalización del universal en 5*

Por lo que se obtiene la conclusión antes mencionada.

En el ejemplo 3.9 se sigue que si en el conjunto de premisas, cada una posee el cuantificador universal, entonces la conclusión también debe poseer este mismo cuantificador, ya que todos los elementos en el dominio de referencia común cumplen las características dadas por las funciones proposicionales. En el caso en que por lo menos una de las premisas tenga un cuantificador existencial entonces la conclusión se da en términos de este mismo cuantificador, ya que existe por lo menos un elementos que no cumple todas las funciones proposicionales dadas, este situación se ilustra en el ejemplo 3.10.

Ejemplo 3.10. *El dominio de referencia para las premisas que se enumeran a continuación es el conjunto de los números enteros*

1. *Para cada x, si x^3 es divisible por 3 entonces x es divisible por 3.*
2. *Existe un x tal que x no es divisible por 3*

Nótese que la conclusión es que "existe un x tal que x^3 no es divisible por 3". Si hacemos que T es el predicado "Divisible por 3" entonces las premisas se escriben como

1. $(\forall x)(T_{x^3} \to T_x)$ *. . . Hipótesis*
2. $(\exists x)(\sim T_x$ *. . . Hipótesis*

Ejemplificando respecto de los cuantificadores universal y existencial resulta

3. $T_{b^3} \to T_b$ *. . .* (b/x) *en 1*
4. $\sim T_b$ *. . .* (b/x) *en 2*
5. $\sim T_{b^3}$ *. . . Modus tolendo tolens entre 3 y 4*

*Nótese que la ejemplificación $x = b$ está sujeta al cuantificador existencial, es decir, no se cumple para todos los b en el dominio de referencia, sino para algunos. Es por ello que no es posible hacer una generalización universal como en el ejemplo 3.9 sino que se hará uso de la **Generalización Existencial** para tener*

6. $(\exists x)(\sim T_{x^3})$ ... *Generalización Existencial en 5*

Y así existe un x tal que x no es divisible por 3

A continuación se especifica el sistema formal para la lógica proposicional: Alfabeto, reglas de formación, definiciones, mecanismo deductivo (axiomas, reglas de inferencia) y los teoremas; los cuales surgen de forma natural con base en los ejemplos que se han ilustrado hasta este punto.

3.2. Sistema Formal

3.2.1. Alfabeto

1. El mismo alfabeto de la lógica proposicional.
2. El conjunto de términos individuales que denotan a los sujetos (variables y constantes), en ambos casos se hace uso de las letras latinas minúsculas para denotarlos, para los primeros $x, y, z, \ldots$, para los segundos $a, b, c, \ldots$
3. El conjunto de letras predicativas que denotan las propiedades o características de los sujetos. Se denotarán con letras mayúsculas.
4. El cuantificador universal denotado como $\forall$.

3.2.2. Reglas de Formación

1. Si P_x es una función proposicional entonces $(\forall x)(P_x)$ designa una fórmula (f.b.f)

3.2.3. Definiciones

Definición 3.1. ***Cuantificador Existencial*** *Si P_x es una función proposicional entonces $(\exists x)(P_x)$ designa la fórmula $\sim(\forall x)(\sim P_x)$, se escribe como $(\exists x)(P_x) \leftrightarrow \sim(\forall x)(\sim P_x)$.*

3.2.4. Mecanismo Deductivo

3.2.4.1. Axiomas

Sea a un objeto matemático, x una variable libre en P_x, entonces

Axioma 3.1. ***Ejemplificación Universal*** $(\forall x)(P_x) \rightarrow (a/x)(P_x)$ *es un enunciado verdadero. También se puede escribir como* $(\forall x)(P_x) \rightarrow P_a$.

Axioma 3.2. ***Generalización Universal*** $(C \to P_x) \to (C \to (\forall x)(P_x))$

Axioma 3.3. ***Generalización Existencial*** $(a/x)P_x \to (\exists x)(P_x)$ *es un enunciado verdadero.*

3.2.4.2. Reglas de Inferencia

Si P_x es una función proposicional entonces

1. **Generalización Universal** Si P_x es una fórmula (proposición) verdadera entonces $(\forall x)(P_x)$ es una función verdadera.
2. **Generalización Existencial** Si $(a/x)P_x$ es verdadera entonces $(\exists x)(P_x)$ es verdadera.
3. **Ejemplificación Universal** Si $(\forall x)(P_x)$ es una proposición verdadera entonces $(a/x)P_x$ es verdadera o equivalente a P_a es verdadera.
4. **Ejemplificación Existencial** Si $(\exists x)(P_x)$ es una proposición verdadera entonces $(a/x)P_x$ es verdadera o equivalente a P_a es verdadera.
5. **Contraejemplo** Si $\sim (a/x)P_x$ es verdadera entonces $\sim (\forall x)(P_x)$ es una proposición verdadera.
6. **Distribución del universal en la implicación** Si $P_x \to Q_x$ es una función proposicional entonces $(\forall x)(P_x) \to (\forall x)(Q_x)$.
7. **Distribución del existencial en la implicación** Si $P_x \to Q_x$ es una función proposicional entonces $(\exists x)(P_x) \to (\exists x)(Q_x)$.

3.2.5. Teoremas

Antes de enunciar los teoremas refentes a la lógica cuantificacional veamos algunos ejemplos que clarifican el contenido de los mismo.

Ejemplo 3.11. *Consideremos las funciones proposicionales $P_x : x$ es par y $Q_x : x$ es impar, donde el dominio de referencia sean los números enteros. La disjunción entre P_x y Q_x está dada por $P_x \vee Q_x : x$ es par $\vee$ x es impar, que al cuantificar respecto del universal se tiene la proposición*

$$(\forall x)(x \text{ es par} \vee x \text{ es impar})$$

La cual es una proposición verdadera, ya que un entero es par o es impar. La cuantificación de las funciones proposicionales P_x y Q_x conduce a $(\forall x)(x \text{ es par})$ y $(\forall x)(x \text{ es impar})$, que son ambas proposiciones falsas y por ello la conjunción entre éstas

$$(\forall x)(x \text{ es par}) \vee (\forall x)(x \text{ es impar})$$

es falsa de acuerdo con la tabla de verdad de la disjunción, es por ello que el condicional

$$[(\forall x)(x \text{ es par}) \vee (\forall x)(x \text{ es impar})] \to (\forall x)(x \text{ es par} \vee x \text{ es impar})$$

es verdadero puesto que el antecedente es falso pero el consecuente es verdadero (ver la tabla de verdad del condicional). Mientras que el condicional

$$(\forall x)(x \text{ es par} \vee x \text{ es impar}) \to [(\forall x)(x \text{ es par}) \vee (\forall x)(x \text{ es impar})]$$

es falso por tener antecedente verdadero pero consecuente falso. Es por ello que el condicional $[(\forall x)(P_x) \vee (\forall x)(Q_x)] \to (\forall x)(P_x \vee Q_x)$ es verdadero como se demostrará en el teorema 3.1, mientras que el condicional $(\forall x)(P_x \vee Q_x) \to [(\forall x)(P_x) \vee (\forall x)(Q_x)]$ no siempre es verdadero como se acaba de ilustrar.

Teorema 3.1. ***Propiedades del cuantificador universal*** *Sean P_x y Q_x funciones proposicionales entonces*

1. $(\forall x)(\sim(\sim P_x)) \leftrightarrow (\forall x)(P_x)$ *es una proposición verdadera.*
2. $(\forall x)(P_x \wedge Q_x) \leftrightarrow (\forall x)(P_x) \wedge (\forall x)(Q_x)$ *es una proposición verdadera.*
3. $(\forall x)(P_x) \vee (\forall x)(Q_x) \to (\forall x)(P_x \vee Q_x)$ *es una proposición verdadera.*
4. $(\forall x)(C \wedge P_x) \leftrightarrow C \wedge (\forall x)(P_x)$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Prosa]

Por el teorema de la doble negación de la lógica proposicional 2.3 se tiene que $\sim(\sim P_x) \to P_x$, de acuerdo con la regla de inferencia de la distribución del universal en la implicación resulta la proposición $(\forall x)(\sim(\sim P_x)) \to (\forall x)(P_x)$ (1). Por un razonamiento análogo se tiene que $P_x \to \sim(\sim P_x)$ lo que induce la proposición $(\forall x)(P_x) \to (\forall x)(\sim(\sim P_x))$ (2). Por el teorema de conjunción de la lógica proposicional se sigue que

$$[(\forall x)(\sim(\sim P_x)) \to (\forall x)(P_x)] \wedge [(\forall x)(P_x) \to (\forall x)(\sim(\sim P_x))]$$

Que por la definición de bicondicional se concluye que $(\forall x)(\sim(\sim P_x)) \leftrightarrow (\forall x)(P_x)$.

Demostremos ahora la segunda propiedad, para ello por el teorema de simplificación (2.7) de la lógica proposicional resultan las proposiciones $P_x \wedge Q_x \to P_x$ y $P_x \wedge Q_x \to Q_x$, que al aplicar la distribución del universal respecto de la implicación se sigue que $(\forall x)(P_x \wedge Q_x) \to (\forall x)(P_x)$ y $(\forall x)(P_x \wedge Q_x) \to (\forall x)(Q_x)$, en este caso se tiene dos implicaciones, para lo que es posible hacer uso del teorema de adición entre implicaciones para tener

$$[(\forall x)(P_x \wedge Q_x) \wedge (\forall x)(P_x \wedge Q_x)] \to [(\forall x)(P_x) \wedge (\forall x)(Q_x)]$$

Haciendo uso de la propiedad de idempotencia se tiene la proposición

$$(\forall x)(P_x \wedge Q_x) \to [(\forall x)(P_x) \wedge (\forall x)(Q_x)] \ (3)$$

Al ejemplificar respecto del cuantificador universal (axioma 3.1) se tienen las expresiones $(\forall x)(P_x) \to P_a$ y $(\forall x)(Q_x) \to Q_a$, donde (a/x), proposiciones a las que se puede aplicar la adición entre implicaciones resultando $[(\forall x)(P_x) \wedge (\forall x)(Q_x)] \to P_a \wedge Q_a$ (4). Mientras que la proposición $P_a \wedge Q_a \to (\forall x)(P_x \wedge Q_x)$ (5) es cierta de acuerdo con la regla de inferencia de la generalización del universal, por silogismo hipotético (transitividad) entre los condicionales hallados (4) y (5) se sigue que

$$[(\forall x)(P_x) \wedge (\forall x)(Q_x)] \to (\forall x)(P_x \wedge Q_x) \ (6)$$

Por conjunción y definición de bicondicional entre las implicaciones obtenidas en (3) y (6) se concluye que $[(\forall x)(P_x) \wedge (\forall x)(Q_x)] \leftrightarrow (\forall x)(P_x \wedge Q_x)$.

Por al axioma de adjunción de la lógica proposicional y por el teorema de conmutatividad las proposiciones $P_x \to P_x \vee Q_x$ y $Q_x \to P_x \vee Q_x$ son verdaderas, que al hacer uso de la distribución del universal respecto de la implicación se tienen los condicionales $(\forall x)(P_x) \to (\forall x)(P_x \vee Q_x)$ y $(\forall x)(Q_x) \to (\forall x)(P_x \vee Q_x)$, que por la adición entre implicaciones resulta

$$[(\forall x)(P_x) \vee (\forall x)(Q_x)] \to [(\forall x)(P_x \vee Q_x) \vee (\forall x)(P_x \vee Q_x)]$$

De donde se sigue que $[(\forall x)(P_x) \vee (\forall x)(Q_x)] \to (\forall x)(P_x \vee Q_x)$ esto por la propiedad de idempotencia y así concluir la demostración. $\square$

Ejemplo 3.12. *Para las funciones proposicionales $P_x : x^3 < 0$ y $Q_x : x^3 > 0$, la conjunción está dada por $P_x \wedge Q_x : x^3 < 0 \wedge x^3 > 0$, cuantificando cada una de estas funciones proposicionales en términos del existencial resulta $(\exists x)(x^3 < 0)$ (proposición verdadera), $(\exists x)(x^3 > 0)$ (proposición verdadera) y $(\exists x)(x^3 < 0 \wedge x^3 > 0)$ la cual es una proposición falsa ya que ningún número real puede ser a la vez positivo y negativo. Por lo tanto el condicional*

$$[(\exists x)(x^3 < 0) \wedge (\exists x)(x^3 > 0)] \to (\exists x)(x^3 < 0 \wedge x^3 > 0)$$

es falso debido a que el antecedente es verdadero pero el consecuente es falso, mientras que el condicional

$$(\exists x)(x^3 < 0 \wedge x^3 > 0) \to (\exists x)(x^3 < 0) \wedge (\exists x)(x^3 > 0)]$$

es verdadero por tener antecedente falso y consecuente verdadero. En términos de P_x *y* Q_x *resulta que* $[(\exists x)(P_x) \wedge (\exists x)(Q_x)] \rightarrow (\exists x)(P_x \wedge Q_x)$ *no siempre es una proposición verdadera, mientras que el condicional* $(\exists x)(P_x \wedge Q_x) \rightarrow [(\exists x)(P_x) \wedge (\exists x)(Q_x)]$ *es siempre verdadero como se demuestra en el siguiente teorema.*

Teorema 3.2. ***Propiedades del cuantificador existencial*** *Sean* P_x *y* Q_x *funciones proposicionales entonces*

1. $(\exists x)(\sim (\sim P_x)) \leftrightarrow (\exists x)(P_x)$ *es una proposición verdadera.*
2. $(\exists x)(P_x \vee Q_x) \leftrightarrow (\exists x)(P_x) \vee (\exists x)(Q_x)$ *es una proposición verdadera.*
3. $(\exists x)(P_x \wedge Q_x) \rightarrow (\exists x)(P_x) \wedge (\exists x)(Q_x)$ *es una proposición verdadera.*
4. $(\exists x)(C \vee P_x) \leftrightarrow C \vee (\exists x)(P_x)$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Afirmación-Razón]

1. $(\forall x)(\sim (\sim (\sim P_x))) \leftrightarrow (\forall x)(\sim P_x)$	... Teoremas 3.1 literal 1
2. $\sim (\forall x)(\sim (\sim (\sim P_x))) \leftrightarrow \sim (\forall x)(\sim P_x)$	... Teorema de equivalencia en 1
3. $(\exists x)(\sim (\sim P_x)) \leftrightarrow (\exists x)(P_x)$	... Def del existencial en 2 (ver 3.1)
4. $(\forall x)(\sim P_x \wedge \sim Q_x) \leftrightarrow (\forall x)(\sim P_x) \wedge (\forall x)(\sim Q_x)$	... Teorema 3.1 literal 2
5. $\sim (\forall x)(\sim P_x \wedge \sim Q_x) \leftrightarrow \sim [(\forall x)(\sim P_x) \wedge (\forall x)(\sim Q_x)]$	... Teorema de equivalencia en 4
6. $\sim (\forall x)(\sim (P_x \vee Q_x)) \leftrightarrow \sim (\forall x)(\sim P_x) \vee \sim (\forall x)(\sim Q_x)$	... Ley D'Morgan en 5
7. $(\exists x)(P_x \vee Q_x) \leftrightarrow (\exists x)(P_x) \vee (\forall x)(Q_x)$	... Definición del existencial en 6
8. $(\forall x)(\sim P_x) \vee (\forall x)(\sim Q_x) \rightarrow (\forall x)(\sim P_x \vee \sim Q_x)$	... Teorema 3.1 literal 3
9. $\sim (\forall x)(\sim P_x \vee \sim Q_x) \rightarrow \sim [(\forall x)(\sim P_x) \vee (\forall x)(\sim Q_x)]$	... Contrarrecíproco en 8
10. $\sim (\forall x)(\sim (P_x \wedge Q_x)) \rightarrow \sim (\forall x)(\sim P_x) \wedge (\forall x)(\sim Q_x)$	... Ley D'Morgan en 9
11. $(\exists x)(P_x \wedge Q_x) \rightarrow (\exists x)(P_x) \wedge (\exists x)(Q_x)$	... Definición del existencial en 10

Teorema 3.3. ***Negación del cuantificador existencial*** *Si* P_x *es una función proposicional entonces* $\sim (\exists x)(P_x) \leftrightarrow (\forall x)(\sim P_x)$

Demostración [Prosa]

Con base en la definición del cuantificador existencial (ver 3.1) se tiene la equivalencia $(\exists x)(P_x) \leftrightarrow \sim (\forall x)(\sim P_x)$, haciendo uso del teorema de equivalencia 2.9 se sigue que los contrarios son equivalentes, es decir, $\sim (\exists x)(P_x) \leftrightarrow \sim [\sim (\forall x)(\sim P_x)]$ y así por la doble negación se concluye que $\sim (\exists x)(P_x) \leftrightarrow (\forall x)(\sim P_x)$. $\square$

Ejemplo 3.13. *Consideremos la proposición* $(\exists x)(x^3 = -8 \wedge x < 0)$*, la cual es verdadera ya que* $x = -2$ *satisface la conjunción* $x^3 = -8 \wedge x < 0$*. Si negamos la proposición se tiene* $\sim (\exists x)(x^3 = -8 \wedge x < 0)$ *que por el teorema 3.3 resulta* $(\forall x)[\sim (x^3 = -8 \wedge x < 0)]$*, por medio de la propiedad D'Morgan se tiene la expresión*

$$(\forall x)(x^3 \neq -8 \vee x \nless 0) \leftrightarrow (\forall x)(x^3 \neq -8 \vee x \geq 0)$$

Proposición que es verdadera siempre y cuando $x \neq -2$*.*

Ejemplo 3.14. *Si se quiere negar la proposición* $(\exists x)(P_x \vee Q_x) \to (\exists y)(R_y \vee Q_y)$ *es necesario hacer uso de las propiedades de la lógica proposicional donde*

1. $\sim [(\exists x)(P_x \vee Q_x) \to (\exists y)(R_y \vee Q_y)]$	*. . . Negación de la proposición*
2. $(\exists x)(P_x \vee Q_x) \wedge \sim (\exists y)(R_y \vee Q_y)$	*. . . Ley D'Morgan en 1*
3. $(\exists x)(P_x \vee Q_x) \wedge (\forall y)[\sim (R_y \vee Q_y)]$	*. . . Teorema 3.3 en 2*
4. $(\exists x)(P_x \vee Q_x) \wedge (\forall y)[\sim R_y \wedge \sim Q_y)$	*. . . Ley D'Morgan en 3*

Teorema 3.4. ***Negación del cuantificador Universal*** *Si* P_x *es una función proposicional entonces* $\sim (\forall x)(P_x) \leftrightarrow (\exists x)(\sim P_x)$

Demostración [Prosa]

La definición del cuantificador existencial implica que $(\exists x)(\sim P_x) \leftrightarrow \sim (\forall x)(\sim (\sim P_x))$ (1). Por las propiedades del cuantificador universal (ver teorema 3.1) referente a la doble negación se tiene que $(\forall x)(\sim (\sim P_x)) \leftrightarrow (\forall x)(P_x)$, por lo que sus contrarios también son equivalentes $\sim (\forall x)(\sim (\sim P_x)) \leftrightarrow \sim (\forall x)(P_x)$ (2); puesto que el bicondicional es transitivo entonces entre las expresiones (1) y (2) se sigue que $(\exists x)(\sim P_x) \leftrightarrow \sim (\forall x)(P_x)$ de donde sus recíprocos son equivalentes también (ver teorema 2.9) y así $\sim (\forall x)(P_x) \leftrightarrow (\exists x)(\sim P_x)$. $\square$

Ejemplo 3.15. *Para la proposición* $(\forall x)(x^2 \geq 1 \to |x| \geq 1)$*, la cual es cierta, su negación está representada por*

$$\sim (\forall x)(x^2 \geq \to |x| \geq 1) \leftrightarrow (\exists x)[\sim (x^2 \geq 1 \to |x| \geq 1)]$$

Como la negación del condicional $P \to Q$ *es equivalente a* $P \wedge \sim Q$ *de acuerdo con la propiedad de D'Morgan entonces la negación de la proposición dada equivale a*

$$(\exists x)(x^2 \geq 1 \wedge |x| \ngeq 1) \leftrightarrow (\exists x)(x^2 \geq 1 \wedge |x| < 1)$$

Proposición que no es cierta para todo x *en los reales.*

Ejemplo 3.16. *Veamos que de la proposición* $(\forall x)(P_x \wedge Q_x) \rightarrow (\exists x)(T_x)$ *se deduce la proposición* $(\exists x)(P_x \rightarrow (Q_x \rightarrow T_x))$

1. $(\forall x)(P_x \wedge Q_x) \rightarrow (\exists x)(T_x)$ ... *Hipótesis*
2. $\sim (\forall x)(P_x \wedge Q_x) \vee (\exists x)(T_x)$ ... *Definición de condicional en 1*
3. $(\exists x)[\sim (P_x \wedge Q_x)] \vee (\exists x)(T_x)$ ... *Negación del universal en 2*
4. $(\exists x)[\sim P_x \vee \sim Q_x)] \vee (\exists x)(T_x)$ ... *Ley D'Morgan en 3*
5. $(\exists x)[(\sim P_x \vee \sim Q_x) \vee T_x]$ ... *Propiedades del existencial (ver 3.2) en 4*
6. $(\exists x)[\sim P_x \vee (\sim Q_x \vee T_x)]$ ... *Asociativa en 5*
7. $(\exists x)[P_x \rightarrow (Q_x \rightarrow T_x)]$ ... *Definición de condicional en 6*

Ejemplo 3.17. *Para determinar si la proposición* $(\forall x)((P_x \vee Q_x) \rightarrow P_x$ *se hace uso de la propiedad de ejemplificación existencial para tener* $(P_a \vee Q_a) \rightarrow P_a$ (1), *es decir,* (a/x). *En la proposición compuesta* (1) *se tienen dos proposiciones simples* P_a *y* Q_a *para lo que existen cuatro posibilidades lógicas, en la siguiente tabla se ilustra este hecho*

P_a	$\vee$	Q_a	$\rightarrow$	P_a
V	*V*	*V*	***V***	*V*
V	*V*	*F*	***V***	*V*
F	*V*	*V*	***F***	*F*
F	*F*	*F*	***V***	*F*

Por tanto la proposición $(P_a \vee Q_a) \rightarrow P_a$ *es una indeterminación, así como la proposición* $(\forall x)((P_x \vee Q_x) \rightarrow P_x)$.

Ejemplo 3.18. *Considérese la proposición* $\sim (\forall x)[((P_x \vee Q_x) \wedge \sim Q_x) \rightarrow P_x)$, *antes de hacer la ejemplificación, es necesario que la negación que antecede al cuantificador no aparezca, para ello se hace uso del teorema de la negación del cuantificador universal 3.4, por lo que se obtiene la equivalente*

$$(\exists x)[\sim (((P_x \vee Q_x) \wedge \sim Q_x) \rightarrow P_x)] \leftrightarrow (\exists x)[((P_x \vee Q_x) \wedge \sim Q_x) \wedge \sim P_x]$$

En el lado derecho de la anterior equivalencia se hizo uso de la ley D'Morgan, si se ejemplifica respecto del existencial haciendo (a/x) *resulta la proposición* $((P_a \vee Q_a) \wedge \sim Q_a) \wedge \sim P_a$, *generando así cuatro posibilidades lógicas*

P_a	$\vee$	Q_a	$\wedge$	$\sim Q_a$	$\wedge$	$\sim P_a$
V	*V*	*V*	*F*	*F*	***F***	*F*
V	*V*	*F*	*V*	*V*	***F***	*F*
F	*V*	*V*	*F*	*F*	***F***	*V*
F	*F*	*F*	*F*	*V*	***F***	*V*

Así las proposiciones $((P_a \vee Q_a) \to Q_a) \vee \sim Q_a$ *y* $\sim (\forall x)[((P_x \vee Q_x) \to Q_x) \wedge Q_x)$ *son contradicciones.*

Ejemplo 3.19. *En los reales la propiedad conmutativa para la suma ilustra que independiente de los números reales* x *e* y *que se eligan se sigue la igualdad* $x + y = y + x$*, lo cual se ilustra en términos de cuantificadores como* $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$ *propiedad que es cierta independiente en el orden en que se tomen los cuantificadores universales, es decir, también es cierto que* $(\forall y)(\forall x)(x+y = y+x)$*, en cuyo caso la función proposicional* $P_{xy} : x + y = y + x$ *no varía y se escribe* $(\forall x)(\forall y)(P_{xy}) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(P_{xy})$*.*

Ejemplo 3.20. *Sea* $x = -1$ *entonces para dicho número existe un real* z *tal que* $x^3+z^3 = 0$*, en efecto, si se hace* $z = 1$ *la desigualdad se satisface, en términos de los cuantificadores se escribe como* $(\exists x)(\exists z)(x^3 + z^3 = 0)$*. Si por el contrario se inicia suponiendo que* $z = 1$*, existe* $x = -1$ *tal que* $x^3 + z^3 = 0$*, es por ello que la proposición* $(\exists z)(\exists x)(x^3 + z^3 = 0)$ *es verdadera también, lo que muestra que los cuantificadores existenciales pueden conmutar*

$$(\exists x)(\exists z)(P_{xz}) \leftrightarrow (\exists z)(\exists x)(P_{xz})$$

Donde $P_{xz} : x^3 + z^3 = 0$ *es la función proposicional ligada a las variables* x *e* z*.*

Los ejemplos 3.19 y 3.20 permiten garantizar que los operadores universales y existenciales pueden cambiar respecto de una función proposicional que está ligada a las variables x e y; esto se enuncia en el siguiente teorema 3.6.

Teorema 3.5. ***Conmutatividad*** *Si* P_{xy} *una función proposicional que depende de las variables* x *e* y *entonces*

1. $(\forall x)(\forall y)(P_{xy}) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(P_{xy})$
2. $(\exists x)(\exists y)(P_{xy}) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(P_{xy})$

Demostración [Afirmación-Razón]

1. $(\forall y)(P_{xy}) \to P_{xb}$	. . . Ejemplificación en y (b/y)
2. $(\forall x)(\forall y)(P_{xy}) \to (\forall x)(P_{xb})$	. . . Distributiva del $\forall$ en la implicación en 1
3. $(\forall x)(P_{xb}) \to P_{ab}$	. . . Ejemplificación en x (a/x)
4. $(\forall x)(\forall y)(P_{xy}) \to P_{ab}$	. . . Transitividad entre 2 y 3
5. $P_{ay} \to (\forall x)(P_{xy})$	. . . Generalización del $\forall$
6. $(\forall y)(P_{ay}) \to (\forall y)(\forall x)(P_{xy})$	. . . Distribución del $\forall$ en la implicación en 5
7. $P_{ab} \to (\forall y)(P_{ay})$	. . . Generalización del $\forall$
8. $P_{ab} \to (\forall y)(\forall x)(P_{xy})$	. . . Transitividad entre 6 y 7

9. $(\forall x)(\forall y)(P_{xy}) \rightarrow (\forall y)(\forall x)(P_{xy})$ ... Transitividad entre 4 y 8
10. $(\forall y)(\forall x)(P_{xy}) \rightarrow (\forall x)(\forall y)(P_{xy})$ ... Procedimiento análogo
11. $(\forall x)(\forall y)(P_{xy}) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(P_{xy})$ ... Conjunción y definición de bicondicional entre 9 y 10

12. $(\forall x)(\forall y)(\sim P_{xy}) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(\sim P_{xy})$ ... Por el literal 1
13. $\sim (\forall x)(\forall y)(\sim P_{xy}) \leftrightarrow \sim (\forall y)(\forall x)(\sim P_{xy})$ ... Teorema de equivalencia en 12
14. $(\exists x)[\sim (\forall y)(\sim P_{xy})] \leftrightarrow (\exists y)[\sim (\forall x)(\sim P_{xy})]$ ... Negación del universal en 13
15. $(\exists x)(\exists y)[\sim (\sim P_{xy})] \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)[\sim (\sim P_{xy})]$ ... Negación del universal en 14
16. $(\exists x)(\exists y)(P_{xy}) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)(P_{xy})$ ... Doble negación en 15

Ejemplo 3.21. *Sea x un número real, entonces para dicho número existe un único número y tal que $x + y = x$ (denótese P_{xy} esta función proposicional, es decir, $P_{xy} : x + y = x$), en efecto, dicho número y es el cero, puesto que $x + 0 = x$ esto para todo x, esto se escribe por medio de los cuantificadores como $(\forall x)(\exists y)(x + y = y)$, nótese que esto es equivalente a decir que existe un y tal que para todos los x se cumple $x + y = x$ que en términos de la lógica cuantificacional se escribe como $(\exists y)(\forall x)(x + y = x)$. Esta situación induce a pensar que la equivalencia $(\forall x)(\exists y)(P_{xy}) \leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(P_{xy})$ es cierta; sin embargo consideremos otra situación: Para cada x real existe otro real y tal que $x + y = 0$ donde y es el inverso aditivo se escribe $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$, sin embargo, la expresión $(\exists y)(\forall x)(x + y = 0)$ no es cierta, ya que no existe ningún real y tal que $x + y = 0$ para todos los x, así el condicional $(\forall x)(\exists y)(P_{xy}) \rightarrow (\exists y)(\forall x)(P_{xy})$ no siempre es verdadero.*

Por medio del ejemplo 3.21 se enuncia el teorema 3.6, para el cual se presenta que el intercambio de cuantificadores existencial universal solo puede hacerse en este orden y no entre un cuantificador universal y un existencial.

Teorema 3.6. ***Intercambio de los cuantificadores*** *Si P_{xy} es una función proposicional que depende de las variables x e y entonces*

$$(\exists x)(\forall y)(P_{xy}) \rightarrow (\forall y)(\exists x)(P_{xy})$$

Demostración [Prosa]

De acuerdo con la ejemplificación del cuantificador universal se tiene que $(\forall y)(P_{xy}) \rightarrow P_{xb}$ donde x es una variable libre y (b/y), al aplica la regla de inferencia de la distribución del existencial respecto del condicional resulta $(\exists x)(\forall y)(P_{xy}) \rightarrow (\exists x)(P_{xb})$ (1), como $(\exists x)(P_{xb}) \rightarrow P_{ab}$ (2) por la ejemplificación existencial con (a/x) entonces por transitividad entre (1) y (2) se obtiene $(\exists x)(\forall y)(P_{xy}) \rightarrow P_{ab}$ (3).

Por la generalización existencial respecto de la variable x, se escribe $P_{ay} \rightarrow (\exists x)(P_{xy})$, que por la distributiva del universal en el condicional resulta $(\forall y)(P_{ay}) \rightarrow (\forall y)(\exists x)(P_{xy})$ (4), ya que $P_{ab} \rightarrow (\forall y)(P_{ay})$ por la generalización universal respecto de y entonces por transitividad con (4), $P_{ab} \rightarrow (\forall y)(\exists x)(P_{xy})$, y así por transitividad con el condicional obtenido en (3)

$$(\exists x)(\forall y)(P_{xy}) \rightarrow (\forall y)(\exists x)(P_{xy})$$

Lo que concluye la demostración. $\square$

3.3. Inferencias

De acuerdo con el conjunto de premisas o hipótesis que se presentan en cada caso deducir la tesis, para ello hacer uso de los diferentes elementos del sistema formal de la lógica cuantificacional o proposicional.

Hipótesis	Conclusión
$(\forall x)((x < 4 \wedge 4 < 5) \rightarrow x < 5)$	
$(\forall z)(-4 < -z \leftrightarrow z < 4)$	3<5
$4 < 5$	
$-4 < -3$	

1. $(\forall x)((x < 4 \wedge 4 < 5) \rightarrow x < 5)$ ... Hipótesis
2. $(\forall z)(-4 < -z \leftrightarrow z < 4)$ ... Hipótesis
3. $4 < 5$ ... Hipótesis
4. $-4 < -3$ ... Hipótesis
5. $(3 < 4 \wedge 4 < 5) \rightarrow 3 < 5$ ... $(3/x)$ en 1
6. $-4 < -3 \leftrightarrow 3 < 4$ ... $(3/z)$ en 2
7. $(-4 < -3 \rightarrow 3 < 4) \wedge (3 < 4 \rightarrow -4 < -3)$ ... Definición de bicondicional en 6
8. $-4 < -3 \rightarrow 3 < 4$ ... Simplificación en 7
9. $3 < 4$ ... Modus ponendo ponens entre 4 y 8
10. $3 < 4 \wedge 4 < 5$ ... Conjunción entre 9 y 3
11. $3 < 5$ ... Modus ponendo ponens entre 5 y 10

Hipótesis	Conclusión
$(\forall z)(\forall y)((P_z \wedge P_y) \rightarrow P_{zy})$	$P_5 \rightarrow [P_{-3} \leftrightarrow P_{5(-3)}]$
$(\forall y)(\forall w)((P_y \wedge \sim P_w) \rightarrow \sim P_{yw})$	

1. $(\forall z)(\forall y)((P_z \wedge P_y) \rightarrow P_{zy})$ ... Hipótesis
2. $(\forall y)(\forall w)((P_y \wedge \sim P_w) \rightarrow \sim P_{yw})$ ... Hipótesis

3. $(P_5 \wedge P_{-3}) \rightarrow P_{5(-3)}$ ... $(5/z)(-3/y)$ en 2
4. $(P_5 \wedge \sim P_{-3}) \rightarrow \sim P_{5(-3)}$ ... $(5/y)(-3/w)$ en 2
5. $\sim (P_5 \wedge P_{-3}) \vee P_{5(-3)}$ ... Definición de condicional en 3
6. $(\sim P_5 \vee \sim P_{-3}) \vee P_{5(-3)}$ ... D'Morgan en 5
7. $\sim P_5 \vee (\sim P_{-3} \vee P_{5(-3)})$ ... Asociativa en 6
8. $\sim P_5 \vee (P_{-3} \rightarrow P_{5(-3)})$ ... Definición de condicional en 7
9. $\sim (P_5 \wedge \sim P_{-3}) \vee \sim P_{5(-3)}$ ... Definición de condicional en 4
10. $(\sim P_5 \vee P_{-3}) \vee \sim P_{5(-3)}$ ... D'Morgan y doble negación en 9
11. $\sim P_5 \vee (P_{-3} \vee \sim P_{5(-3)})$ ... Asociativa en 10
12. $\sim P_5 \vee (\sim P_{5(-3)} \vee P_{-3})$ ... Conmutativa en 11
13. $\sim P_5 \vee (P_{5(-3)} \rightarrow P_{-3})$ ... Definición de condicional en 12
14. $[\sim P_5 \vee (P_{-3} \rightarrow P_{5(-3)})] \wedge [\sim P_5 \vee (P_{5(-3)} \rightarrow P_{-3})]$ ... Conjunción entre 8 y 11
15. $\sim P_5 \vee [(P_{-3} \rightarrow P_{5(-3)}) \wedge (P_{5(-3)} \rightarrow P_{-3})]$ ... Distributiva en 14
16. $\sim P_5 \vee [P_{-3} \leftrightarrow P_{5(-3)}]$ ... Definición de bicondicional en 15

Hipótesis	Conclusión
$(\forall y)(\forall z)((O_y \wedge O_z) \rightarrow E_{y+z})$	
$(\forall x)((O_x \leftrightarrow \sim D_x)$	E_{5+7}
$(\forall w)(O_w \vee E_w)$	
$\sim D_7 \wedge \sim E_5$	

1. $(\forall y)(\forall z)((O_y \wedge O_z) \rightarrow E_{y+z})$ ... Hipótesis
2. $(\forall x)((O_x \leftrightarrow \sim D_x)$ ... Hipótesis
3. $(\forall w)(O_w \vee E_w)$ ... Hipótesis
4. $\sim D_7 \wedge \sim E_5$ ... Hipótesis
5. $(O_5 \wedge O_7) \rightarrow E_{5+7}$ ... $(5/y)(7/z)$ en 1
6. $O_7 \leftrightarrow \sim D_7$ ... $(7/x)$ en 2
7. $O_5 \vee E_5$ ... $(5/w)$ en 3
8. $(O_7 \rightarrow \sim D_7) \wedge (\sim D_7 \rightarrow O_7)$ ... Definición de bicondicional en 6
9. $\sim D_7 \rightarrow O_7$ ... Simplificación en 8
10. $\sim D_7$ ... Simplificación en 4
11. O_7 ... Modus ponendo ponens entre 9 y 10
12. $\sim E_5$ ... Simplificación en 4
13. O_5 ... Modus tolendo ponens entre 7 y 12
14. $O_5 \wedge O_7$ ... Conjunción entre 13 y 11
15. E_{5+7} ... Modus ponendo ponens entre 5 y 15

Hipótesis	Conclusión
$(\forall x)(\sim P_x \to (\sim N_x \to x = 0))$	
$\sim N_{5-5}$	$5 - 5 = 0$
$(\forall y)(y > 0 \leftrightarrow P_y)$	
$5 - 5 \not> 0$	

1. $(\forall x)(\sim P_x \to (\sim N_x \to x = 0))$ . . . Hipótesis
2. $\sim N_{5-5}$ . . . Hipótesis
3. $(\forall y)(y > 0 \leftrightarrow P_y)$ . . . Hipótesis
4. $5 - 5 \not> 0$ . . . Hipótesis
5. $\sim P_{5-5} \to (\sim N_{5-5} \to 5 - 5 = 0)$ . . . $(5 - 5/x)$ en 1
6. $5 - 5 > 0 \leftrightarrow P_{5-5}$ . . . $(5 - 5/y)$ en 3
7. $[5 - 5 > 0 \to P_{5-5}] \wedge [P_{5-5} \to 5 - 5 > 0]$ . . . Definición de bicondicional en 6
8. $P_{5-5} \to 5 - 5 > 0$ . . . Simplificación en 7
9. $\sim P_{5-5}$ . . . Modus tolendo tolens entre 4 y 8
10. $\sim N_{5-5} \to 5 - 5 = 0$ . . . Modus ponendo ponens entre 5 y 9
11. $5 - 5 = 0$ . . . Modus ponendo ponens entre 2 y 10

Hipótesis	Conclusión
$(\forall x)(R_x \wedge Z_x)$	
$(\exists x)(\sim Q_x \to \sim R_x)$	$(\exists x)(Q_x \wedge K_x)$
$(\exists x)(Z_x \to K_x)$	

1. $(\forall x)(R_x \wedge Z_x)$ . . . Hipótesis
2. $(\exists x)(\sim Q_x \to \sim R_x)$ . . . Hipótesis
3. $(\exists x)(Z_x \to K_x)$ . . . Hipótesis
4. $R_a \wedge Z_a$ . . . (a/x) en 1
5. $\sim Q_a \to \sim R_a$ . . . (a/x) en 2
6. $Z_a \to K_a$ . . . (a/x) en 3
7. R_a . . . Simplificación en 4
8. $\sim (\sim Q_a)$ . . . Modus tolendo tolens entre 5 y 7
9. Q_a . . . Doble negación en 8
10. Z_a . . . Simplificación en 4
11. K_a . . . Modus ponendo ponens entre 6 y 11
12. $Q_a \wedge K_a$ . . . Conjunción entre 9 y 11
13. $(\exists x)(Q_x \wedge K_x)$ . . . Generalización existencial en 12

Hipótesis	Conclusión
$(\forall x)(R_x \vee Z_x)$ $(\forall x)(\sim T_x \to \sim R_x)$ $(\exists x)(\sim Z_x \vee Q_x)$	$(\exists x)(T_x \vee (Q_x \vee M_x))$

1. $(\forall x)(R_x \vee Z_x)$ ... Hipótesis
2. $(\forall x)(\sim T_x \to \sim R_x)$ ... Hipótesis
3. $(\exists x)(\sim Z_x \vee Q_x)$ ... Hipótesis
4. $R_a \vee Z_a$ ... (a/x) en 1
5. $\sim T_a \to \sim R_a$ ... (a/x) en 2
6. $\sim Z_a \vee Q_a$ ... (a/x) en 3
7. $R_a \to T_a$ ... Contrarrecíproco y doble negación en 5
8. $Z_a \to Q_a$ ... Definición de condicional en 6
9. $T_a \vee Q_a$ ... Método de casos entre 4, 7 y 8
10. $T_a \vee (Q_a \vee M_a)$ ... Axioma de adjunción M_a y asociativa en 9
11. $(\exists x)(T_x \vee (Q_x \vee M_x))$ ... Generalización existencial en 10

Hipótesis	Conclusión
$(\forall x)(P_x \vee (Q_x \wedge R_x))$ $\sim (\forall x)(\sim S_x \wedge \sim T_x)$ $(\exists x)(S_x \to \sim (P_x \vee Q_x))$	$\sim (\forall x)(\sim T_x)$

1. $(\forall x)(P_x \vee (Q_x \wedge R_x))$ ... Hipótesis
2. $\sim (\forall x)(\sim S_x \wedge \sim T_x)$ ... Hipótesis
3. $(\exists x)(S_x \to \sim (P_x \vee Q_x))$ ... Hipótesis
4. $(\exists x)[\sim (\sim S_x \wedge \sim T_x)]$ ... Negación del universal (ver 3.4) en 2
5. $P_a \vee (Q_a \wedge R_a))$ ... (a/x) en 1
6. $\sim (\sim S_a \wedge \sim T_a)$ ... (a/x) en 4
7. $S_a \to \sim (P_a \vee Q_a)$ ... (a/x) en 3
8. $S_a \vee T_a$ ... Ley D'Morgan y Doble negación en 7
9. $(P_a \vee Q_a) \wedge (P_a \vee R_a)$ ... Distributiva en 5
10. $P_a \vee Q_a$ ... Simplificación en 10
11. $\sim S_a$ ... Modus tolendo tolens entre 7 y 11
12. T_a ... Modus tolendo ponens entre 9 y 12
14. $(\exists x)(T_x)$ ... Generalización del existencial en 13
15. $(\exists x)(\sim (\sim T_x))$ ... Teorema 3.1 en 14
16. $\sim (\forall x)(\sim T_x)$ ... Negación del universal en 15

3.4. Ejercicios

1. Por medio de los signos del alfabeto de la lógica cuantificacional simbolizar los siguientes enunciados que están dados en el lenguaje natural. Además determine el valor de verdad de dichas proposiciones, en el caso de ser falsas exhiba un contraejemplo

   a) Existe un número primo que es impar.
   b) Ningún número divisible por 3 termina en 3 exceptuando el 3.
   c) Todos los hexágonos tiene 9 diagonales.
   d) Todos los números que terminan en 3 son primos.
   e) Ningún número divide al 19.
   f) Para todos los naturales, la diferencia es otro natural.
   g) Ningún pentágono es convexo.
   h) Todos los números racionales son naturales.

2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, en el caso de ser falsas exhiba un contraejemplo (caso que no satisface el enunciado)

   a) Todos los números racionales son naturales.
   b) Existe un número primo que es impar.
   c) Ningún número divisible por 3 termina en 3 exceptuando el 3.
   d) Todos los números que terminan en 3 son primos. item Todos los hexágonos tiene 9 diagonales.

3. Niegue los siguientes enunciados haciendo uso de las propiedades de la lógica cuantificacional.

   a) $(\forall x)[(\forall y)(P_{xy} \to R_{xy})]$
   b) $(\forall x)[(\exists y)(x + y = x^y)]$
   c) $\sim (\exists y)(R_a \to P_y)$
   d) $(\forall x)(\sim P_x \vee \sim Q_x) \wedge (\exists x)(R_x)$
   e) $(\forall x)((x = 3 \wedge x^2 \neq 9) \to x \neq 4)$
   f) $(\exists y)(A_y \to (\forall x)(R_x \wedge P_y))$
   g) $(\forall x)[(\forall y)(P_{xy} \wedge \sim R_{xy})]$
   h) $(\forall x)(x > 2) \to (\exists y)(x + y \geq xy)]$
   i) $\sim (\forall y)(\sim R_y \iff P_y)$
   j) $(\exists x)(\sim P_x \to Q_x) \wedge (\exists x)(R_x \vee S_x)$
   k) $(\forall x)(x = 3 \wedge (x^2 = 9 \to x \neq 4))$
   l) $(\exists y)[P_y \to (\forall x)[(\forall y)(Q_{xy})]]$

4. Sea $A = \{-4, -1, 1, 2, 4\}$ el dominio de referencia. Determine el valor de verdad de cada uno de los enunciados que se presentan a continuación, en el caso de ser falsos muestre el contraejemplo.

   a) $(\forall x)(\forall y)(x + y \leq 8)$
   b) $\sim (\exists x)(x^3 = 1)$
   c) $(\forall x)(\exists y)(x^2 < y^2)$
   d) $(\forall x)[\sim (\exists y)(x^2 + 1 = y^2)]$
   e) $(\exists x)(\exists y)(x^2 - y = 0)$
   f) $(\forall x)(\forall y)((-1)^x + (-1)^y) = 0$
   g) $(\forall x)(|x| = -x)$
   h) $(\forall x)(\exists y)(x - y = (-1)^3)$
   i) $(\forall x)(-14 \leq xy \leq 16)$
   j) $(\forall x)(\exists y)(x = y^2)$

5. Determine si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones o indeterminaciones

   a) $(\forall x)((P_x \to \sim P_x) \to \sim P_x)$
   b) $(\forall x)[((P_x \to Q_x) \wedge \sim Q_x) \to \sim P_x]$
   c) $\sim (\forall x)[((P_x \to Q_x) \wedge P_x) \to Q_x]$
   d) $\sim (\exists x)(\sim (P_x \wedge \sim P_x))$

6. Inferencias: Hacer uso de los axiomas, reglas de inferencia y teoremas del sistema formal de la lógica proposicional y de la lógica cuantificacional para deducir los siguientes teoremas.

Hipótesis	Conclusión	Hipótesis	Conclusión
$(\forall x)(\forall y)((x > 0 \wedge y < 0) \to N_{x/y})$ $(\forall u)(\forall v)((u < 0 \to N_{v/u}) \to P_v)$ $7 > 0$	P_7	$(\forall x)(P_x \to R_x)$ $(\forall x)(P_x \to Q_x)$ $(\exists x)(\sim Q_x \vee \sim R_x)$	$(\exists x)(\sim P_x)$
$(\forall x)(\forall y)(\sim M_{xy} \vee S_{yx})$ B_a $(\forall u)(\forall z)(S_{zc} \to (B_z \to P_{uc}))$	$M_{ca} \to P_{ec}$	$\sim (\exists x)(R_x \to P_x)$ $(\exists x)(Q_x \wedge R_x \to P_x)$	$(\exists x)(\sim Q_x)$
$(\forall x)(\exists y)(P_x \to Q_x \vee R_y)$ $\sim (\forall y)(Q_y)$ $(\forall x)(P_x)$	$(\exists x)(R_x)$	$(\forall x)(\sim S_x \to \sim T_x)$ $(\forall x)(T_x)$	$(\forall x)(T_x \leftrightarrow S_x)$
$(\forall x)(\sim P_x \to (Q_x \to \sim R_x))$ $(\forall y)(R_y \to \sim P_y)$ $(\forall x)(\sim S_x \vee P_x \to \sim (\sim R_x))$ $\sim S_a$	$\sim Q_a$	$(\forall x)((P_x \to Q_x) \vee R_x)$ $(\exists x)(R_x \to S_x)$ $(\forall x)(P_x \wedge \sim S_x)$	$(\exists x)(Q_x)$

7. Demuestre las siguientes propiedades haciendo uso de la ejemplificación y generalización de la lógica cuantificacional.

   a) $(\forall x)(P_x \to \sim P_x) \to (\forall x)(\sim P_x)$
   b) Si $(\forall x)[(P_x \to R_x) \wedge (Q_x \to R_x)]$ entonces $(\forall x)((P_x \vee Q_x) \to R_x)$

8. Por medio de las propiedades de la lógica cuantificacional y de la lógica proposicional, demuestre que

   a) Si $\sim (\forall x)[P_x \to (\exists x)(Q_x \vee \sim P_x)]$ entonces $(\exists x)(\forall x)(\sim Q_x)$
   b) Si $(\forall x)(P_x \wedge Q_x) \to (\exists x)(T_x)$ entonces $(\exists x)(P_x \to (Q_x \to T_x))$
   c) Si $\sim (\exists x)((\forall y)(R_{xy}) \to (\exists y)(R_{xy} \vee S_{xy}))$ entonces $(\forall x)(\forall y)(\sim S_{xy})$

Capítulo 4

Métodos de Demostración

4.1. Introducción

En el apéndice A se hace un resumen de los sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y complejos) y las operaciones usuales que se definen en éstos, debido a esto se sugiere que se haga una lectura de dicho apéndice para mejorar la comprensión de los ejemplos y ejercicios que se proponen en este capítulo, así como la justificación en las demostraciones. Los métodos de demostración son herramientas que facilitan las deducción o demostraciones de teoremas, el uso de estos métodos está supeditado a los objetos matemáticos que se enuncian en el teorema, aunque algunos de ellos se pueden demostrar por métodos diferentes.

4.2. Método Directo

El método directo se base en las proposiciones del tipo $P \rightarrow Q$, en dicho caso la P corresponde a la hipótesis y Q a la tesis, para ello se inicia suponiendo que la hipótesis es verdadera y tras una serie de cadenas lógicas (axiomas, definiciones, teoremas, corolarios, lemas) se concluye Q, lo cual es suficiente para concluir que $P \rightarrow Q$ es verdadera de acuerdo con la tabla de verdad del condicional.

Es importante tener en cuenta las siguientes anotaciones que hace Alberto Jaramillo (ver [11]) acerca del método de demostración directo

1. De forma intuitiva podemos fundamentar la validez de este método en el hecho de que la implicación es falsa únicamente en el caso en el cual partiendo de un antecedente verdadero se llegará a una conclusión falsa; éste es precisamente el caso que queda descartado cuando asumiendo la verdad del antecedente concluimos la verdad del consecuente. Como con antecedente falso la implicación es siempre verdadera no se

requiere ninguna otra consideración.

2. Es fundamental tener presente que al aplicar este método no se está determinando la validez absoluta del consecuente Q, sino su validez relativa al supuesto de que el antecedente P es verdadero. En consecuencia, lo que se válida absolutamente es que $P \to Q$ es verdadero.
3. En una misma demostración podemos aplicar reiteradamente el método directo si la conclusión del primer condicional es a su vez otro condicional y así sucesivamente.

4.2.1. Ejemplos de lógica proposicional

En los siguientes ejemplos se aplica el método directo para proposiciones compuestas que tienen asociado un condicional o un bicondicional, en este segundo caso, $P \leftrightarrow Q$, el método directo se aplica en dos sentidos, es decir, de izquierda a derecha $P \to Q$ y de derecha a izquierda $Q \to P$. Se requiere el uso de las propiedades demostradas para la lógica proposicional.

Ejemplo 4.1. $[(P \to Q) \wedge P] \to (P \wedge Q)$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Para la aplicación del método directo, se supone que la proposición $(P \to Q) \wedge P$ es verdadera y constituye la hipótesis. Si se hace uso de la simplificación resulta que $P \to Q$ y P son proposiciones verdaderas, que por el modus ponendo ponens se sigue que Q es una proposición verdadera; como P y Q son verdaderas entonces por conjunción $P \wedge Q$ es verdadero, el cual era el propósito de la demostración. El método directo permite argumentar que $[(P \to Q) \wedge P] \to (P \wedge Q)$ es una proposición verdadera. $\square$

Ejemplo 4.2. $[(P \to R) \wedge (P \to Q) \wedge (\sim Q \vee \sim R)] \to \sim P$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Método Directo, Afirmación-Razón]

1. $(P \to R) \wedge (P \to Q) \wedge (\sim Q \vee \sim R)$	. . . Hipótesis
2. $P \to R$	. . . Simplificación en 1
3. $P \to Q$	. . . Simplificación en 1
4. $\sim Q \vee \sim R$	. . . Simplificación en 1
5. $\sim R \vee \sim Q$	. . . Conmutativa en 4
6. $\sim R \to \sim P$	. . . Contrarrecíproco en 2
7. $\sim Q \to \sim P$	. . . Contrarrecíproco en 3

8. $(\sim R \vee \sim Q) \rightarrow (\sim P \vee \sim P)$	... Adición entre implicaciones entre 6 y 7
9. $\sim P \vee \sim P$	... Modus ponendo ponens entre 5 y 8
10. $\sim P$	... Idempotencia en 9
11. $[(P \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q) \wedge (\sim Q \vee \sim R)] \rightarrow \sim P$	... Método directo entre 1 y 10

Ejemplo 4.3. $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \rightarrow R]$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Método Directo, Afirmación-Razón]

"$\Rightarrow$"	1. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	... Hipótesis
	2. $\sim P \vee (\sim Q \vee R)$	... Definición de condicional en 1
	3. $(\sim P \vee \sim Q) \vee R$	... Asociativa en 2
	4. $\sim (P \wedge Q) \vee R$	... D'Morgan en 3
	5. $(P \wedge Q) \rightarrow R$	... Definición de condicional en 4
	6. $[P \rightarrow (Q \rightarrow R)] \rightarrow [(P \wedge Q) \rightarrow R]$	... Método directo entre 1 y 5
"$\Leftarrow$"	7. $(P \wedge Q) \rightarrow R$	... Hipótesis
	8. $\sim (P \wedge Q) \vee R$	... Definición de condicional en 1
	9. $(\sim P \vee \sim Q) \vee R$	... D'Morgan en 8
	10. $\sim P \vee (\sim Q \vee R)$	... Asociativa en 9
	11. $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	... Definición de condicional en 10
	12. $[(P \wedge Q) \rightarrow R] \rightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$	... Método directo entre 7 y 11

El ejemplo 4.3 reviste importancia cuando en los enunciados de los teoremas existen dos condicionales $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$, para ello se escribe los dos antecedentes: P y Q como hipótesis, $P \wedge Q$, y debe demostrarse solo el segundo consecuente R. En el siguiente ejemplo se hace uso de este resultado, aunque no es el único camino de solución.

Ejemplo 4.4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)]$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

El enunciado a demostrar tiene la estructura del ejemplo 4.3, es por ello que la hipótesis se puede escribir como $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$, que por el teorema de transitiva resulta el condicional $P \rightarrow R$ el cual era el consecuente a deducir, es por ello que

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)]$$

es una proposición verdadera. $\square$

4.2.2. Ejemplos de números pares e impares

La adición y multiplicación entre números pares es otro número par, es por ello que el conjunto $\mathbb{Z}_p$ de números pares es cerrado bajo estas operaciones, a continuación se demuestran ambos resultados. Los impares por su parte son solo cerrados bajo la operación de multiplicación, ya que la suma entre dos impares es un número par.

Ejemplo 4.5. *Si m y n son enteros pares entonces $m+n$ y $m \cdot n$ son enteros pares.*

Demostración [Método Directo, Afirmación-Razón]

1. m es par	... Hipótesis
2. n es par	... Hipótesis
3. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$	... Definición de número par en 1
4. Existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2r$	... Definición de número par en 2
5. $m + n = 2k + 2r$	... Sumando las igualdades dadas en 3 y 4
6. $m + n = 2(k + r)$	... Propiedad distributiva en 5
7. $m + n = 2z$ con $z \in \mathbb{Z}$ y $k + r = z$	... Propiedad clausurativa en 6
8. $m + n$ es par	... Definición de número par en 7
9. $m \cdot n = (2k) \cdot (2r)$	... Multiplicando las igualdades dadas en 3 y 4
10. $m \cdot n = 2[k \cdot (2r)]$	... Asociativa de la multiplicación en 9
11. $m \cdot n = 2 \cdot t$ con $t \in \mathbb{Z}$ y $t = k \cdot (2r)$	... Clausurativa de la multiplicación en 10
12. $m \cdot n$ es par	... Definición de número par en 11

Ejemplo 4.6. *Si m y n son números impares entonces $m+n$ es par y $m \cdot n$ es impar.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Por hipótesis tanto m como n son impares, de allí que existen k y r enteros tales que $m = 2k + 1$ (1) y $n = 2r + 1$ (2), sumando las expresiones (1) y (2) resulta

$$m + n = (2k + 1) + (2r + 1)$$

que al sumar términos semejantes se escribe $m+n = 2k+2r+2$, con base en las propiedades distributiva y clausurativa se tiene $m+n = 2(k+r+1) = 2z$ donde $z \in \mathbb{Z}$ ya que $z = k+r+1$, es por ello que $m + n$ es par. En el caso de multiplicar las igualdades (1) y (2) se obtiene $m \cdot n = (2k + 1)(2r + 1)$ aplicando las diferentes propiedades en los enteros se tiene la igualdad

$$m \cdot n = 4kr + 2k + 2r + 1 = 2(2kr + k + r) + 1$$

Que al hacer uso de la propiedad clausurativa escribimos $m \cdot n = 2t + 1$ donde $t \in \mathbb{Z}$, es por ello que $m \cdot n$ es un número impar. $\square$

Siempre que un número es impar, su cuadrado y cubo son impares también, por ejemplo, $n = 7$ produce $n^2 = 49$ y $n^3 = 749$ por que la multiplicación de impares $n^2 = 7 \cdot 7$ es otro impar, así cualquier potencia de un número impar es otro número impar. Situación análoga resulta con los números pares. En la siguiente tabla se resume esta situación para los números del 2 al 5.

n	n^2	n^3	n^4	n^5
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125

Nótese además que hay otras particularidades en la tabla, si n^2 es par entonces n es par también, es decir, si la potencia tiene resultado par, la base debe ser par también. Esto sucede con cualquiera de las potencias y con los números impares también. A continuación se demuestran algunas de estas conclusiones.

Ejemplo 4.7. *n^2 y n^3 son impares siempre que n es impar.*

Demostración [Método Directo, Afirmación-Razón]

1. n es impar ... Hipótesis
2. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$ ... Definición de número impar en 1
3. $n^2 = (2k + 1)^2$ ... Elevando al cuadrado en 2
4. $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ ... Trinomio cuadrado en 3
5. $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ ... Distributiva en 4
6. $n^2 = 2t + 1$ con $t \in \mathbb{Z}$ ... Clausurativa en 5
7. n^2 es impar ... Definición de número impar en 6
8. $n^3 = (2k + 1)^3$ ... Elevando al cubo en 2
9. $n^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1$ ... Binomio de Newton en 8
10. $n^3 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$ ... Distributiva en 9
11. $n^3 = 2p + 1$ con $p \in \mathbb{Z}$ ... Clausurativa en 10
12. n^3 es impar ... Definición de número impar en 11

4.2.3. Ejemplos de relación de orden

La relación de orden, denotada $<$, permite comparar dos números, así $3 < 5$ indica que el número 3 es menor que el 5, es decir, el tres está a la izquierda del cinco. Por definición $a < b$ si y sólo si $b - a$ es un número positivo, esto es, si $0 < b - a$, la situación $a \leq b$ indica que $a < b$ o $a = b$, para ello el axioma de adjunción de la lógica proposicional tiene relevancia.

Analicemos algunas de las propiedades que cumplirá la relación de orden: Como $3 < 7$ y $7 < 10$ entonces se sigue que $3 < 10$, es decir, la relación de orden cumple la propiedad transitiva. Por otro lado, como $3 < 7$ entonces al multiplicar por -1 se tienen los números -3 y -7 para los cuales se cumple que $-3 > -7$, es decir, cuando se multiplica por un número negativo la desigualdad cambia.

Ejemplo 4.8. ***Transitividad***. *Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$, con a, b, c reales.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Por hipótesis se tiene que $a < b$ y $b < c$, haciendo uso de la definición de orden se sigue que $b - a > 0$ (1) y $c - b > 0$ (2), por el axioma de orden se tiene que la suma de dos reales positivos es otro real positivo es por ello que al sumar las expresiones (1) y (2) se tiene $(b - a) + (c - b) > 0$ haciendo uso de las propiedades en los reales se logra $c - a > 0$ y así concluir que $a < c$. □

Ejemplo 4.9. *Sean a, b reales tales que $a < b$*

1. *Si $c > 0$ entonces $ac < bc$*
2. *Si $c < 0$ entonces $ac > bc$*

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. $a < b$	. . . Hipótesis
2. $0 < c$	. . . Hipótesis
3. $0 < b - a$	. . . Definición de orden en 1
4. $0 < (b - a) \cdot c$	. . . Axioma de orden entre 2 y 3
5. $0 < bc - ac$	. . . Distributiva en 4
6. $ac < bc$	. . . Definición de orden en 5
7. $c < 0$	. . . Hipótesis

8. $0 < -c$ ... Definición de orden en 7
9. $0 < (b - a) \cdot (-c)$ ... Axioma de orden entre 3 y 8
10. $0 < ac - bc$ ... Distributiva y ley de signos en 9
11. $bc < ac$ ... Definición de orden en 10

El axioma de orden indica que tanto la suma como la multiplicación de dos reales positivos da como resultado otros real positivo; sin embargo, la multiplicación de dos reales negativos es un real positivo, esto es, tal conjunto no es cerrado bajo la multiplicación. Si se elige ahora un real positivo y un real negativo, el resultado es un real negativo como se demuestra a continuación.

Ejemplo 4.10. *Si $a > 0$ y $b < 0$ entonces $ab < 0$.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Por las hipótesis se tiene que $a > 0$ y $b < 0$ en este segundo caso se hace uso de la definición de orden para tener que $-b > 0$, como la multiplicación de dos reales positivos es otro real positivo entonces $a \cdot (-b) > 0$ que por la ley de signos equivale a $-a \cdot b > 0$, de lo cual se sigue que $ab < 0$ por la definición de orden. □

Ya que $2 < 11$ y $3 < 4$ entonces se puede multiplicar los elementos menores de esta desigualdad y los mayores para tener $2 \cdot 3 < 11 \cdot 4$ que equivale a $6 < 44$, esta expresión es verdadera. Analicemos otro caso, $-4 < 3$ y $-2 < 1$, aplicando el mismo procedimiento resulta $8 < 3$ que es contradictorio, así que esta situación es válida siempre que los números sean positivos.

Ejemplo 4.11. *Sean a, b, c, d reales positivos tales que $a < b$ y $c < d$ entonces $ac < bd$.*

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. a, b, c, d reales positivos ... Hipótesis
2. $a < b$ ... Hipótesis
3. $c < d$ ... Hipótesis
4. $ac < bc$ ... Multiplicando por $c > 0$ en 2
5. $bc < bd$ ... Multiplicando por b en 3
6. $ac < bd$ ... Transitividad entre 4 y 5

Como consecuencia de la propiedad demostrada en el ejemplo anterior, corolario, se sigue que si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$ siempre que tanto a como b sean positivos, ya que si no es el caso, $-2 < 1$ pero $4 \not< 1$, expresión que se lee "*4 no es menor que 1*".

Ejemplo 4.12. *Sean a, b reales positivos. Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

De la hipótesis se tiene que a y b son ambos reales positivos, de allí que $a > 0$ y $b > 0$, como además $a < b; (1)$ entonces en la desigualdad (1) se multiplica a ambos lados por a por lo que la desigualdad se conserva (ejemplo 4.9) así $a \cdot a < a \cdot b$ (2), si por el contrario se multiplica la desigualdad (1) por b, con b positivo se obtiene $a \cdot b < b \cdot b$ (3). Haciendo uso de la transitividad de la relación de orden (ejemplo 4.8) entre las desigualdades (2) y (3) se logra $a \cdot a < b \cdot b$ y así por la definición de potenciación $a^2 < b^2$. $\square$

4.2.4. Ejemplos de Divisibilidad

En estos ejemplos alusivos a la divisibilidad de números enteros es necesario aclarar que divisibilidad y división son términos distintos, escribir $4|8$ y $4/8 = \frac{4}{8}$ son diferentes situaciones, ya que la divisibilidad relaciona números enteros y la división produce números. Además es necesario recordar que en los enteros no se presenta la división, pero si la propiedad cancelativa, esto es, si $a \cdot b = a \cdot c$ entonces $b = c$ siendo $a \neq 0$ y a, b, c enteros.

Se sabe que $5|10$ y a su vez $10|80$, como 5 también divide al 80 entonces se puede inferir que la divisibilidad cumple la propiedad transitiva, donde el 10 hace el enlace entre 5 y 80. Por otro lado, $4|12$ y $4|28$ pero además el 4 divide también a la suma y a la resta entre 12 y 28, en efecto $12 + 28 = 40 = 4 \cdot 10$ y $12 - 28 = -16 = 4 \cdot (-4)$, pero también se puede multiplicar 12 por 5 y 28 por 7 para tener $12 \cdot 5 + 28 \cdot 7 = 256 = 4 \cdot 64$, es decir, el 4 divide a cualquier combinación lineal de 12 y 28. Los resultados de la transitividad y la combinación lineal se demuestran a continuación.

Ejemplo 4.13. ***Transitividad*** *Si m, n, p son enteros tales que $m|n$ y $n|p$ entonces $m|p$.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Por hipótesis tenemos que $m|n$ y $n|p$, de acuerdo con la definición de divisibilidad existen enteros k y k_1 tales que $n = mk$ (1) y $p = nk_1$ (2) de forma respectiva. Al sustituir la igualdad (1) en la (2) resulta que $p = (mk)k_1 = m(kk_1)$ en este caso se hizo de la propiedad asociativa, mientras que por la clausurativa, kk_1 es un entero, llámese t para lo que $p = mt$ y así $m|p$ que era el propósito de la prueba. $\square$

Ejemplo 4.14. ***Combinación lineal*** *Si $m|n$ y $m|p$ entonces $m|(\alpha n + \beta p)$, donde α y β son enteros y al término $\alpha n + \beta p$ se le llama combinación lineal de n y p.*

Demostración [Método directo, Afirmación-razón]

1. $m\|n$	... Hipótesis
2. $m\|p$	... Hipótesis
3. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = mk$	... Definición de divisibilidad en 1
4. Existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $p = mk_1$	... Definición de divisibilidad en 2
5. $\alpha n = \alpha(mk)$	... Multiplicando por α en 3
6. $\beta p = \beta(mk_1)$	... Multiplicando por α en 4
7. $\alpha n + \beta p = \alpha(mk) + \beta(mk_1)$	... Sumando las expresiones 5 y 6
8. $\alpha n + \beta p = m[\alpha k + \beta k_1]$	... Propiedades de los enteros en 7
9. $\alpha n + \beta p = mt$ con $t \in \mathbb{Z}$	... Clausurativa en 8
10. $m\|(\alpha n + \beta p)$	... Definición de divisibilidad en 9

Ejemplo 4.15. *Si $m|n$ y $p|q$ entonces $mp|nq$ donde m, n, p, q son enteros.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Debido a que $m|n$ y $p|q$ por hipótesis entonces existen k y k_1 en los enteros para los que $n = mk$ y $q = pk_1$ si se multiplican ambas igualdades término por término tenemos $nq = (mk)(pk_1)$, aplicando las propiedades asociativa y conmutativa se obtiene las igualdades

$$nq = m(kp)k_1 = m(pk)k_1 = (mp)(kk_1)$$

Debido a que k y k_1 son números enteros entonces kk_1 es otro entero llámese t por lo que $nq = (mp)t$ y así $mp|nq$ de acuerdo con la definición de divisibilidad. □

Consideremos ahora que $3|21$, nótese que $3^2|21^2$, es decir, $9|441$ en efecto, $441 = 9 \cdot 49$. De igual forma $3^3|21^3$ ya que $21^3 = 9261 = 3^3 \cdot 343$. Se infiere entonces que si $m|n$ entonces $m^k|n^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. A continuación se demuestra esta propiedad para $k = 2$.

Ejemplo 4.16. *Si $m|n$ entonces $m^2|n^2$.*

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. $m|n$ ... Hipótesis
2. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = mk$ ... Definición de divisibilidad en 1
3. $n^2 = (mk)^2$ ... Elevando al cuadrado en 2
4. $n^2 = m^2k^2$ ... Propiedades de potenciación en 3
5. $n^2 = m^2z$ con $z \in \mathbb{Z}$ ... Clausurativa en 4
6. $m^2|n^2$ ... Definición de divisibilidad en 5

Una consecuencia de la relación de divisibilidad es la congruencia, donde $m \cong n \mod r$ sii $r|m - n$. Por ejemplos, $4 \cong 16 \mod 2$ ya que $2|(4 - 16)$, mientras que $16 \cong -8 \mod 2$ puesto que $2|16 - (-8)$; nótese además que la expresión $4 \cong -8 \mod 2$ también es cierta, de allí que la congruencia módulo r cumpla la propiedad transitiva así como la divisibilidad.

Ejemplo 4.17. ***Transitividad de la congruencia*** *Si* $m \cong n \mod r$ *y* $n \cong z \mod r$ *entonces* $m \cong z \mod r$.

Demostración [Método Directo, Prosa]

Por hipótesis $m \cong n \mod r$ y $n \cong z \mod r$, con base en la definición de congruencia en términos de la divisibilidad se tiene que $r|m - n$ y $r|n - z$, ya que r divide a cualquier combinación lineal (ver ejemplo 4.14) en especial a la suma, así

$$r|(m - n) + (n - z)$$

De donde se obtiene que $r|m - z$ y por tanto $m \cong z \mod r$ que era el propósito de la prueba. $\square$

Veamos otra propiedad, $16 \cong -7 \mod 3$ si se elevan al cuadrado tanto 16 como -7, se conserva la congruencia módulo 3, en efecto, $16^2 = 256$ y $(-7)^2 = 49$ de allí que $3|256 - 49$, $3|207$ debido a que $207 = 3 \cdot 67$, se escribe $16^2 \cong (-7)^2 \mod 3$. Los números 16 y -7 tienen otra particularidad respecto del 3 y es que ambos dejan el mismo residuo al dividir por 3, en este caso el residuo es 1, así dos números son congruentes si dejan el mismo residuo al dividir por r. Ambas propiedades se demuestran a continuación.

Ejemplo 4.18. *Si* $m \cong n \mod r$ *entonces* $m^2 \cong n^2 \mod r$.

Demostración [Método Directo, Afirmación-Razón]

1. $m \cong n \mod r$ ... Hipótesis
2. $r|m - n$ ... Definición de congruencia en 1
3. $m - n = kr$, con $k \in \mathbb{Z}$ ... Definición de divisibilidad en 2

4. $m = n + kr$ ...Despejando m en 3
5. $m^2 = (n + kr)^2$ ...Elevando al cuadrado en 4
6. $m^2 = n^2 + 2nkr + k^2r^2$ ...Trinomio cuadrado perfecto en 5
7. $m^2 - n^2 = 2nkr + k^2r^2$ ...Propiedades de enteros en 6
8. $m^2 - n^2 = (2nk + k^2r)r$ ...Distributiva en 7
9. $m^2 - n^2 = k_1r$ con $k_1 \in \mathbb{Z}$ ...Clausurativa en 8
10. $r|m^2 - n^2$ ...Definición de divisibilidad en 9
11. $m^2 \cong n^2 \mod r$ ...Definición de congruencia en 10

Ejemplo 4.19. *Si m y n dejan el mismo residuo z al dividir por r entonces $m \cong n \mod r$.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Como m y n dejan el mismo residuo z al dividir por r entonces existen enteros k y k_1 tales que $m = kr+z$ y $n = k_1r+z$, restando ambas igualdades se tiene $m-n = (kr+z)-(k_1r+z)$ que por las propiedades en los enteros se sigue $m - n = (k - k_1)r$, como $k - k_1 = k_2$ es un entero entonces $m - n = k_2r$ que por la definición de divisibilidad $r|m - n$ y así se concluye que $m \cong n \mod r$. $\square$

4.2.5. Ejemplos de Complejos

Los números complejos cumplen una serie de propiedades que generalizan los números reales, algunas de estas propiedades tienen una interpretación geométrica por graficación en el plano de Argand. Para las demostraciones se recurre al hecho que $i^2 = -1$. Consideremos el número complejo $z = 3 - 2i$, asociado a este número se encuentran: La parte real $Re(z) = 3$, la parte imaginaria $Im(z) = -2$, el conjugado $\overline{z} = 3 + 2i$ y el módulo $|z| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. Sumando, restando y multiplicando z y $\overline{z}$ producen $z + \overline{z} = 6 = 2 \cdot 3$, es decir, es el doble de la parte real, $z - \overline{z} = -4i = 2(-2)i$, el doble de la parte imaginaria y $z \cdot \overline{z} = (3 - 2i)(3 + 2i) = 9 - 4i^2 = 9 + 4 = 13$ como $|z| = \sqrt{13}$ entonces $z \cdot \overline{z}$ es el cuadrado del módulo. Se demuestran estas propiedades a continuación.

Ejemplo 4.20. *Sea $z \in \mathbb{C}$ entonces $z + \overline{z} = 2Re(z)$.*

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. $z \in \mathbb{C}$ ...Hipótesis
2. $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ...Definición de número complejo en 1
3. $\overline{z} = a - bi$ ...Definición de conjugado en 2

4. $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi)$ ...Sumando las igualdades 2 y 3
5. $z + \overline{z} = 2a$ ...Propiedades de reales en 4
6. $z + \overline{z} = 2Re(z)$ ...Definición de la parte real de z en 5

Ejemplo 4.21. *Sea $z \in \mathbb{C}$ entonces $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Puesto que $z \in \mathbb{C}$ entonces z se puede escribir de la forma $z = a + bi$ con a y b números reales, el conjugado $\overline{z}$ del complejo z es de la forma $\overline{z} = a - bi$ es por ello que $z \cdot \overline{z}$ se puede escribir como

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 - b^2i^2$$

Debido a que $i^2 = -1$ resulta la igualdad $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ (1). Para $z = a + bi$ el módulo se obtiene como $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ de allí que $|z|^2 = a^2 + b^2$ que por transitividad con la igualdad (1) se concluye que $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Consideremos los números complejos $z = 2 + 3i$ y $z_1 = -3 + 2i$, al multiplicar los mismos se tiene que $z \cdot z_1 = -12 - 5i$ cuyo conjugado es $\overline{z \cdot z_1} = -12 + 5i$. Los conjugados de z y z_1 son $\overline{z} = 2 - 3i$ y $\overline{z_1} = -3 - 2i$ cuyo producto es $\overline{z} \cdot \overline{z_1} = -12i + 5i$ y así $\overline{z \cdot z_1} = \overline{z} \cdot \overline{z_1}$, situación análoga ocurre con la adición, la resta y el cociente.

Ejemplo 4.22. *Sean z y z_1 complejos entonces $\overline{z \cdot z_1} = \overline{z} \cdot \overline{z_1}$.*

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. $z \in \mathbb{C}$ ...Hipótesis
2. $z_1 \in \mathbb{C}$ ...Hipótesis
3. $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$ ...Definición de número complejo en 1
4. $z_1 = c + di$ con $c, d \in \mathbb{R}$ ...Definición de número complejo en 2
5. $z \cdot z_1 = (ac - bd) + (ad + bc)i$ ...Producto de complejos entre 3 y 4
6. $\overline{z \cdot z_1} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ ...Definición de conjugado en 5
7. $\overline{z} = a - bi$ ...Definición de conjugado en 3
8. $\overline{z_1} = c - di$ ...Definición de conjugado en 4
9. $\overline{z} \cdot \overline{z_1} = (ac - bd) + (-ad - bc)i$ ...Producto de complejos entre 7 y 8
10. $\overline{z} \cdot \overline{z_1} = (ac - bd) - (ad + bc)i$ ...Ley de signos en 9
11. $\overline{z \cdot z_1} = \overline{z} \cdot \overline{z_1}$ ...Transitividad entre 6 y 10

Ejemplo 4.23. *Si z y z_1 son números complejos entonces* $\overline{z+z_1} = \overline{z} + \overline{z_1}$.

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. $z \in \mathbb{C}$	...Hipótesis
2. $z_1 \in \mathbb{C}$	...Hipótesis
3. $z = a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$	...Definición de número complejo en 1
4. $z_1 = c + di$ con $c, d \in \mathbb{R}$	...Definición de número complejo en 2
5. $z + z_1 = (a + c) + (b + d)i$	...Suma de complejos entre 3 y 4
6. $\overline{z+z_1} = (a + c) - (b + d)i$	...Definición de conjugado en 5
7. $\overline{z} = a - bi$	...Definición de conjugado en 3
8. $\overline{z_1} = c - di$	...Definición de conjugado en 4
9. $\overline{z} + \overline{z_1} = (a + c) + (-b - d)i$	...Suma de complejos entre 7 y 8
10. $\overline{z} + \overline{z_1} = (a + c) - (b + d)i$	...Ley de signos en 9
11. $\overline{z+z_1} = \overline{z} + \overline{z_1}$	...Transitividad entre 6 y 10

Sean $z = -1+3i$ y $z_1 = 5+2i$, los módulos de ambos complejos son $|z| = \sqrt{10}$ y $|z_1| = \sqrt{29}$, por lo que $|z|\cdot|z_1| = \sqrt{290}$. La multiplicación de z y z_1 es $z \cdot z_1 = -11+13i$ cuyo módulo es $|z \cdot z_1| = \sqrt{290}$, así $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$, tal propiedad funciona también para el cociente pero no para la resta y la suma, en esté último caso se conoce como la **desigualdad triangular**.

Ejemplo 4.24. *Sean z y z_1 números complejos entonces* $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$.

Demostración [Método Directo, Prosa]

Con base en el ejemplo 4.21 se tiene la expresión $|z \cdot z_1|^2 = (z \cdot z_1)\overline{(z \cdot z_1)}$ (1), ya que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados de acuerdo con el ejemplo 4.22 entonces en (1) se escribe $|z \cdot z_1|^2 = (z \cdot z_1)(\overline{z} \cdot \overline{z_1})$, haciendo uso de las propiedades asociativas y conmutativas en los complejos resulta

$$|z \cdot z_1|^2 = z \cdot (z_1 \cdot \overline{z}) \cdot \overline{z_1} = z \cdot (\overline{z} \cdot z_1) \cdot \overline{z_1} = (z \cdot \overline{z}) \cdot (z_1 \cdot \overline{z_1})$$

Por medio del ejemplo 4.21 se sigue que $|z \cdot z_1|^2 = |z|^2|z_1|^2 = (|z| \cdot |z_1|)^2$ (2), debido a que el módulo de un complejo es un número positivo entonces en el expresión (2) se saca raíz cuadrada para tener $|z \cdot z_1| = |z| \cdot |z_1|$ esto para todo complejo z y z_1. $\square$

Por la propiedad del binomio de Newton se sabe que la expresión $(a+b)^2$ se puede expandir como $a^2+2ab+b^2$, es decir, cada sumando al cuadrado y el doble producto de los números, los módulos de los complejos satisfacen una expresión análoga la diferencia es que es el doble producto pero de la parte real entre un complejo z y el conjugado de z_1. Esta propiedad se demuestra a continuación y sirve para demostrar la desigualdad triangular en complejos.

Ejemplo 4.25. *Si z y z_1 son números complejos entonces*

$$|z + z_1|^2 = |z|^2 + 2Re(z \cdot \overline{z_1}) + |z_1|^2$$

Demostración [Método Directo, Prosa]

Debido a que $|z|^2 = z\overline{z}$ (ejemplo 4.21) se sigue que $|z + z_1|^2 = (z + z_1) \cdot \overline{(z + z_1)}$, puesto que el conjugado de una suma es la suma de los conjugados (ejemplo 4.23) y haciendo uso de la propiedad distributiva resulta

$$|z + z_1|^2 = (z + z_1) \cdot (\overline{z} + \overline{z_1}) = z\overline{z} + z \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z} + z_1\overline{z_1}$$

Por medio del ejemplo 4.21 escribimos

$$|z + z_1|^2 = |z|^2 + z \cdot \overline{z_1} + z_1 \cdot \overline{z} + |z_1|^2 \quad (1)$$

Debido a que $\overline{\overline{z}} = z$ para todos los complejos entonces se obtienen las igualdades $\overline{z \cdot \overline{z_1}} = \overline{z} \cdot \overline{\overline{z_1}} = \overline{z} \cdot z_1 = z_1 \cdot \overline{z}$ al sustituir en la expresión (1) se tiene

$$|z + z_1|^2 = |z|^2 + z \cdot \overline{z_1} + \overline{z \cdot \overline{z_1}} + |z_1|^2 \quad (2)$$

Con base en el ejemplo 4.20 se tiene que $z \cdot \overline{z_1} + \overline{z \cdot \overline{z_1}} = 2Re(z \cdot \overline{z_1})$ que al sustituir en la igualdad (2) se concluye que $|z + z_1|^2 = |z|^2 + 2Re(z \cdot \overline{z_1}) + |z_1|^2$. $\square$

Ejemplo 4.26. ***Desigualdad Triangular*** *Si z y z_1 son números complejos entonces $|z + z_1| \leq |z| + |z_1|$.*

Demostración [Método Directo, Prosa]

Por la propiedad demostrada en el ejemplo anterior 4.25 se tiene que

$$|z + z_1|^2 = |z|^2 + 2Re(z \cdot \overline{z_1}) + |z_1|^2 \ (*)$$

Por las propiedades de complejos se sigue que $2Re(z \cdot \overline{z_1}) \leq 2|z \cdot \overline{z_1}|$ (ejercicio propuesto), como el módulo de un producto es el producto de los módulos y $|\overline{z_1}| = |z_1|$ entonces $2Re(z \cdot \overline{z_1}) \leq 2|z| \cdot |z_1|$, por tanto en la igualdad $(*)$ se tiene

$$|z + z_1|^2 \leq |z|^2 + 2|z| \cdot |z_1| + |z_1|^2$$

El lado derecho de la desigualdad anterior es un trinomio cuadrado perfecto, con el cual se escribe $|z + z_1|^2 \leq (|z| + |z_1|)^2$ que al sacar raíz cuadrada se tiene $|z + z_1| \leq |z| + |z_1|$ que era el propósito de la prueba. $\square$

4.3. Método Contrajemplo

Este es un procedimiento para objetar una afirmación o una proposición P_a, consiste en hallar un caso en el cual no tenga cumplimiento tal proposición, en el sistema formal de la lógica cuantificacional se expresó esta condición como $\sim (\forall x)(P_x)$, es decir, que no es cierto para toda x (en un dominio de referencia) tal que P_x se cumpla. Este método es conveniente para refutar enunciados generalizados universalmente, aunque también a través del cuantificador existencial como en la situación $(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$ con dominio de referencia en los reales.

Ejemplo 4.27. *Por ejemplo la proposición "Todo múltiplo de 2 y de 3 es múltiplo de 12" no es cierta para ello considérese a* 18 *que es múltiplo de 2 y 3 pero no de 12.*

Ejemplo 4.28. *La expresión* $(n+m)! = n! + m!$ *para* n *y* m *naturales no siempre es cierta, para ello sean* $n = 2$ *y* $m = 4$*, donde* $n + m = 6$ *por lo que* $(n + m)! = 720$*, mientras que* $n! = 2$ *y* $m! = 24$ *de donde se sigue que* $(n + m)! = 720 \neq n! + m! = 36$*. Sin embargo existe* n *y* m *tales que las proposición es cierta, si* $n = m = 1$ *entonces* $(n + m) =!n! + m!$*, por lo que la proposición* $(\exists n, n)((n + m)! = n! + m!)$ *es cierta.*

Ejemplo 4.29. *Si se tiene la igualdad* $x \cdot y = x \cdot z$ *no siempre se presenta la igualdad* $y = z$*, por ejemplo, si* $x = 0$*,* $y = 2$ *y* $z = 3$ *se tiene que* $x \cdot y = 0 = x \cdot z$ *sin embargo* $y \neq z$*.*

Ejemplo 4.30. *Siempre que tenemos una igualdad, digamos* $x = y$*, no hay dificultad en elevar a ambos lados al cuadrado para tener la igualdad* $x^2 = y^2$*, esta condición no siempre se presenta cuando se trabaja con las desigualdades, es decir, si* $a < b$ *no se sigue que* $a^2 < b^2$*, por ejemplo, se sabe que* $-8 < 2$*, pero* $64 \not< 4$*.*

4.4. Método de Casos

El método de casos consiste en enunciados de la forma $P_1 \vee P_2 \to Q$, es decir, donde en la hipótesis aparece una disjunción, los cuales representan los casos a realizar: P_1, P_2. Por un razonamiento basado en el sistema formal de la lógica proposicional se deduce que $P_1 \to Q$ y $P_2 \to Q$, en efecto

1. $P_1 \vee P_2 \to Q$ . . . Hipótesis
2. $\sim (P_1 \vee P_2) \vee Q$ . . . Definición de condicional en 1
3. $(\sim P_1 \wedge \sim P_2) \vee Q$ . . . Ley de D'morgan en 2
4. $(\sim P_1 \vee Q) \wedge (\sim P_2 \vee Q)$ . . . Distributiva en 3
5. $\sim P_1 \vee Q$ . . . Simplificación en 4

6. $P_1 \to Q$ ... Definición de condicional en 5
7. $\sim P_2 \vee Q$ ... Simplificación en 4
8. $P_2 \to Q$ ... Definición de condicional en 7
9. $(P_1 \to Q) \wedge (P_2 \to Q)$ ... Conjunción entre 6 y 8

Es decir, al obtener $P_1 \to Q$ del enunciado original está implicando que con el caso 1: P_1 se deduce la tesis Q. De igual forma, para el caso 2: P_2 se debe obtener la misma conclusión Q. Esto aplica cuando en la hipótesis hay más de un caso, como ejercicio se propone demostrar que para $[(P_1 \vee P_2) \vee P_3] \to Q$ se deducen las tres implicaciones $P_1 \to Q$, $P_2 \to Q$ y $P_3 \to Q$, en esta situación los casos están dados por: P_1, P_2 y P_3.

Entre los aspectos importantes para el método de casos está el hecho que si se habla de un número real x entonces por la propiedad de tricotomía se presentan tres posibilidades $x > 0$, $x = 0$ o $x < 0$. Para el contexto de los números enteros, digamos n, se pueden analizar los casos en que n sea par y en que n sea impar. Los dos ejemplos que se presentan a continuación son la aplicación del método de casos a la lógica proposicional.

Ejemplo 4.31. $(P \vee Q) \to (\sim P \to Q)$

Demostración [Método de Casos, Afirmación-razón]

1. $P \vee Q$ ... Hipótesis
2. P ... Caso i en 1
3. $\sim (\sim P)$ ... Doble negación en 2
4. $\sim (\sim P) \vee Q$ ... Axioma de adjunción en 3
5. $\sim P \to Q$ ... Definición de condicional en 4
6. Q ... Caso ii en 1
7. $Q \vee P$ ... Axioma de adjunción en 6
8. $P \vee Q$ ... Conmutativa en 7
9. $\sim (\sim P) \vee Q$ ... Doble negación en 8
10. $\sim P \to Q$ ... Definición de condicional en 9
11. $(P \vee Q) \to (\sim P \to Q)$ ... Método de casos entre 5 y 10

Ejemplo 4.32. $[(P \to R) \wedge (P \to Q) \wedge (\sim Q \vee \sim R)] \to \sim P$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Método de Casos, Afirmación-razón]

1. $(P \to R) \wedge (P \to Q) \wedge (\sim Q \vee \sim R)$ . . . Hipótesis
2. $P \to R$ . . . Simplificación en 1
3. $P \to Q$ . . . Simplificación en 1
4. $\sim Q \vee \sim R$ . . . Simplificación en 1
5. $\sim Q$ . . . Caso i en 4
6. $\sim P$ . . . Modus tolendo tolens entre 3 y 5
7. $\sim R$ . . . Caso ii en 4
8. $\sim P$ . . . Modus tolendo tolens entre 2 y 7
9. $[(P \to R) \wedge (P \to Q) \wedge (\sim Q \vee \sim R)] \to \sim P$ . . . Método de casos entre 6 y 8

Consideremos un número entero; como no hay condición, n puede ser par, si $n = 4$ entonces $n^2 + n = 20$, si n es impar, por ejemplo $n = 11$ entonces $n^2 + n = 132$; nótese que en ambos casos el número $n^2 + n$ siempre es par. La expresión $n^2 + n$ se escribe también como $n(n+1)$ esto por la propiedad distributiva, donde $n + 1$ es el entero que sigue a n, es por esto que "*La multiplicación de dos enteros consecutivos es un número par*".

Ejemplo 4.33. *Si n es un número entero entonces $n^2 + n$ es par.*

Demostración [Método de Casos, Prosa]

En este contexto los dos casos son que n sea par y que n sea impar debido a que n es entero.

Caso i: Como n es par entonces existe un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k$ que al elevar al cuadrado se tiene $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, sumando n con n^2 y haciendo uso de la propiedad distributiva escribimos $n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2[2k^2 + k]$, que por la propiedad clausurativa se escribe $n^2 + n = 2r$ con $r \in \mathbb{Z}$ y así $n^2 + n$ es par siempre que n es par.

Caso ii: Supongamos ahora que n es impar por lo que $n = 2k_1 + 1$, donde k_1 es un entero. Si se eleva al cuadrado y se hace uso del trinomio cuadrado perfecto resulta $n^2 = (2k_1 + 1)^2 = 4k_1^2 + 4k_1 + 1$, al sumar n y n^2 se logra

$$n^2 + n = (4k^2 + 4k_1 + 1) + (2k_1 + 1) = 4k_1^2 + 6k_1 + 2 = 2[2k_1^2 + 3k_1 + 1]$$

Es por ello que $n^2 + n = 2t$ con $t \in \mathbb{Z}$ y por tanto $n^2 + n$ es par siempre que n es impar. En ambos casos se concluye que $n^2 + n$ es par para cualquier entero n. $\square$

Cualquier número real que se eleva al cuadrado siempre dará positivo o tal vez cero si $a = 0$, es decir, $a^2 \geq 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Esto ocurre con cualquier potencia que sea par. No ocurre igual con las potencias impares, por que $a^3 > 0$ o $a^3 < 0$ dependiendo si la base es positiva o negativa. El hecho que $a^2 \geq 0$ para cualquier real se puede utilizar en otras expresiones como $(a-b)^2 \geq 0$, $(a+b)^2 \geq 0$ o $(a+b+c)^2 \geq 0$.

Ejemplo 4.34. *Si a es un número real entonces $a^2 \geq 0$.*

Demostración [Método de Casos, Afirmación-razón]

1. $a \in \mathbb{R}$	... Hipótesis
2. $a = 0 \ \vee a > 0 \ \vee a < 0$	... Tricotomía en 1
3. $a = 0$	... Caso i en 2
4. $a^2 = 0$	... Elevando al cuadrado en 3
5. $a^2 = 0 \vee a^2 > 0$	... Axioma de adjunción en 4
6. $a^2 \geq 0$	... Definición de $\geq$ en 5
7. $a > 0$	... Caso ii en 2
8. $a \cdot a > a \cdot 0$	... Multiplicando por a en 7
9. $a^2 > 0$	... Definición de potenciación y propiedad en $\mathbb{R}$ en 8
10. $a^2 > 0 \vee a^2 = 0$	... Axioma de adjunción en 9
11. $a^2 \geq 0$	... Definición de $\geq$ en 10
12. $a < 0$	... Caso iii en 2
13. $a \cdot a > a \cdot 0$	... Multiplicando por a en 12
14. $a^2 > 0$	... Definición de potenciación y propiedad en $\mathbb{R}$ en 13
15. $a^2 > 0 \vee a^2 = 0$	... Axioma de adjunción en 14
16. $a^2 \geq 0$	... Definición de $\geq$ en 15
17. Si $a \in \mathbb{R}$ entonces $a^2 \geq 0$	... Método de casos entre 6, 11 y 16

Si tenemos ahora dos números reales, x e y, por la propiedad de tricotomía se presentan tres posibilidades para cada uno: $x > 0$, $x = 0$ o $x < 0$; $y > 0$, $y = 0$ o $y < 0$. Combinando las posibilidades de cada número resultan los siguientes nueve casos

$$
\begin{array}{lll}
x > 0 \ \wedge \ y > 0 & x > 0 \ \wedge \ y = 0 & x > 0 \ \wedge \ y < 0 \\
x = 0 \ \wedge \ y > 0 & x = 0 \ \wedge \ y = 0 & x = 0 \ \wedge \ y < 0 \\
x < 0 \ \wedge \ y > 0 & x < 0 \ \wedge \ y = 0 & x < 0 \ \wedge \ y < 0
\end{array}
$$

Estas nueve propiedades se presentan cuando se está trabajando, por ejemplo, con el valor absoluto $|xy|$. En expresiones como $\left|\frac{x}{y}\right|$, de los nueve casos, solo se contemplan seis, debido a que $y \neq 0$ y así se descartan los tres casos de la columna de la mitad.

Ejemplo 4.35. *Si x, y son números reales entonces $|xy| = |x||y|$.*

Demostración [Método de Casos, Prosa]

Por la caracterización anterior, son nueve casos en total, de los cuales se analizarán solo dos: Iguales signos (ambos negativos) y signos contrarios.

Caso i: En el caso en que $x < 0 \wedge y < 0$ se obtiene por la definición de valor absoluto que $|x| = -x$ y $|y| = -y$, para lo que $|x| \cdot |y| = (-x)(-y) = xy$ (1). Ya que tanto x como y son reales negativos entonces $xy > 0$, cuyo valor absoluto está dado por $|xy| = xy$, por transitividad por (1) se concluye en este caso que $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Caso ii: Si $x > 0 \wedge y < 0$, con base en el ejemplo 4.10 se sigue que $xy < 0$ y así su valor absoluto es $|xy| = -xy$ (2). Por la elección de este caso se tiene que $|x| = x$ y $|y| = -y$ de donde $|x| \cdot |y| = x \cdot (-y)$ y así por la ley de signos dicha igualdad se escribe como $|x| \cdot |y| = -xy$, por transitividad con la igualdad (2) se tiene $|xy| = |x| \cdot |y|$. $\square$

4.5. Método del Contrarrecíproco

El método del contrarrecíproco es una variante del método directo. Es empleado, por lo general, para probar condicionales en los que al hacer la demostración directa no se logra llegar a la conclusión deseada. En este caso, razonamos por el método directo para probar el contrarrecíproco del condicional que se quiere demostrar; así: Se supone que la negación del consecuente es verdadera para deducir la veracidad de la negación del antecedente, por medio de una sucesión de argumentos válidos; luego de esto, se concluye que el condicional inicial es verdadero. La validez de este método se puede apoyar en el teorema del contrarrecíproco que afirma que todo condicional es equivalente a su contrarrecíproco.

Es decir, al considerar el enunciado $P \to Q$, con P la hipótesis y Q la tesis; el contrarrecíproco de dicho condicional es de la forma $\sim Q \to \sim P$, donde la hipótesis para esta situación es $\sim Q$ y la tesis $\sim P$, cuya veracidad se demuestra a través del método directo.

Ejemplo 4.36. *Si $m \cdot n$ es impar entonces m y n son impares.*

Este enunciado se puede escribir en lenguaje proposicional como $P \to (Q \wedge R)$ donde $P : m \cdot n$ es impar, $Q : m$ es impar y $R : n$ es impar. Haciendo uso del contrarrecíproco se tiene $\sim (Q \wedge R) \to \sim P$, que por la propiedad de D'Morgan equivale a $(\sim Q \vee \sim R) \to \sim P$, ya que la negación de ser un número impar es ser un número par, resulta el enunciado

Contrarrecíproco: *Si m es par o n es par entonces $m \cdot n$ es par*

En esta nueva proposición a demostrar, se debe hacer uso del método de casos, ya que en la hipótesis aparece la disjunción: *m es par o n es par.*

Demostración [Método del Contrarrecíproco, Método de Casos Prosa]

Caso i: Si m es par entonces existe k entero tal que $m = 2 \cdot k$ si se multiplica a ambos lados por n resulta $m \cdot n = (2 \cdot k) \cdot n$ que por la propiedad asociativa de la multiplicación se tiene $m \cdot n = 2 \cdot (k \cdot n)$ ya que $k \cdot n$ es entero entonces se escribe $m \cdot n = 2 \cdot t$ para $t \in \mathbb{Z}$ y así $m \cdot n$ es par.

Caso ii: Para n par, se escribe $n = 2 \cdot p$ con $p \in \mathbb{Z}$, si se multiplica por m tenemos $m \cdot n = m \cdot (2 \cdot p)$ por las propiedades en el sistema de los enteros resulta $m \cdot n = (m \cdot 2) \cdot p = (2 \cdot m) \cdot p = 2 \cdot (m \cdot p)$ de donde $m \cdot n = 2 \cdot q$ para $q \in \mathbb{Z}$ y así $m \cdot n$ es par.

Como se concluye que la proposición: "*Si m es par o n son par entonces $m \cdot n$ es par*" es verdadera entonces su contrarrecíproco: "*Si $m \cdot n$ es impar entonces m y n son impares.*" también es una proposición verdadera. $\square$

Ejemplo 4.37. $\sim P \to [\sim (P \vee Q) \vee Q]$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Método del contrarrecíproco, Afirmación-razón]

El contrarrecíproco de la proposición dada equivale a $\sim [\sim (P \vee Q) \vee Q] \to P$, para la cual se demostrará su validez por medio del método directo.

1. $\sim [\sim (P \vee Q) \vee Q]$	... Hipótesis
2. $(P \vee Q) \wedge \sim Q]$	... Ley D'Morgan y doble negación en 1
3. $P \vee Q$	... Simplificación en 2
4. $\sim Q$	... Simplificación en 3
5. P	... Modus Tolendo Ponens entre 3 y 4

Como se concluyó por el método directo que $\sim [\sim (P \vee Q) \vee Q] \to P$ es cierto, entonces su contrarrecíproco: $\sim P \to [\sim (P \vee Q) \vee Q]$ también es cierto. $\square$

Ejemplo 4.38. *Si n^2 es par entonces n es par.*

Demostración [Método del Contrarrecíproco, Afirmación-razón]

Haciendo uso del contrarrecíproco el enunciado se escribe como: *Si n es impar entonces n^2 es impar*, donde la hipótesis en dicho caso es que n es impar.

1. n es impar	... Hipótesis
2. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$	... Definición de número impar en 1
3. $n^2 = (2k + 1)^2$	... Elevando al cuadrado en 2
4. $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$	... Trinomio cuadrado en 3
5. $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$	... Distributiva en 4
6. $n^2 = 2r + 1$ con $r \in \mathbb{Z}$	... Clausurativa en 5
7. n^2 es impar	... Definición de número impar en 6

Luego el contrarrecíproco: "*Si n^2 es par entonces n es par*" también es cierto. $\square$

En el caso de la divisibilidad se tiene que si n es divisible por 3 entonces se escribe $3|n$, para lo que existe un k entero tal que $n = 3k$, es decir, el residuo que resulta al dividir n entre 3 es cero. En el caso en que 3 no divida a n se escribe $3 \nmid n$ y así la división no exacta, por lo que existen k y r enteros tales que $n = 3k + r$ donde $r = 1$ o $r = 2$, por ejemplo para 19 éste no es divisible por 3 y se escribe $19 = 3 \cdot 6 + 1$, mientras que para 68 resulta $68 = 3 \cdot 2 + 2$. Esta situación se tendrá en cuenta en la solución del siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.39. *Si m no divide a un múltiplo de n entonces m no divide a n. Se escribe Si $m \nmid c \cdot n$ entonces $m \nmid n$.*

Demostración [Método del contrarrecíproco, Prosa]

El contrarrecíproco del enunciado dado se escribe como: "*Si $m|n$ entonces $m|c \cdot n$*", para lo que la hipótesis es $m|n$ que por la definición de divisibilidad, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = m \cdot k$, al multiplicar por c a ambos lados se escribe $n \cdot c = (m \cdot k) \cdot c$ asociando respecto de la multiplicación $n \cdot c = m \cdot (k \cdot c)$ por las propiedad clausurativa se sigue que $n \cdot c = m \cdot r$ para $r \in \mathbb{Z}$, y así por la propiedad conmutativa resulta $c \cdot n = m \cdot r$ con lo que $m|c \cdot n$, es por ello que el contrarrecíproco es cierto, es decir, "*Si $m \nmid c \cdot n$ entonces $m \nmid n$*" $\square$

Ejemplo 4.40. *Si $3 \nmid n$ entonces $3 \nmid n^2$.*

Demostración [Método Directo, Método de Casos, Prosa]

Razonando de forma directa se tiene por hipótesis que $3 \nmid n$ por lo que existen enteros k y r tales que $n = 3k + r$ (1) donde r es el residuo que en este caso puede ser $r = 1$ o $r = 2$ (si

$r = 0$ entonces $n = 3k$ y así $3|n$ situación análoga con $r = 3$). Existen entonces dos casos para analizar:

Caso i: Si $r = 1$ entonces al sustituir en la igualdad (1) se tiene $n = 3k + 1$ que al elevar al cuadrado y desarrollar el binomio se escribe $n^2 = 9k^2 + 6k + 1$ que por la propiedad distributiva y clausurativa resulta $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3z + 1$ con $z \in \mathbb{Z}$ por lo que se concluye que $3 \nmid n^2$ puesto que deja residuo 1.

Caso ii: Si $r = 2$ al proceder al igual que en el caso anterior resulta $n^2 = (3k + 2)^2 = 9k^2 + 12k + 4$ el 4 se puede descomponer como $3 + 1$ para distribuir y tener

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 3 + 1 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3p + 1$$

Siendo p un entero, luego $3 \nmid n^2$ por dejar residuo 1 y con ambos casos concluimos que "*Si* $3 \nmid n$ *entonces* $3 \nmid n^2$". $\square$

4.6. Método Indirecto

El método indirecto o también conocido como reducción al absurdo, se basa, al igual que el método del contrarrecíproco en proposiciones de la forma $P \rightarrow Q$, donde Q no se deduce de P de forma directa, siendo P la hipótesis. A diferencia del método del contrarrecíproco se considera que el condicional $P \rightarrow Q$ no es cierto y se busca una contradicción con el ánimo de asegurar que $P \rightarrow Q$ si es verdadera. Por lógica proposicional $\sim (P \rightarrow Q)$ es equivalente a $P \wedge \sim Q$, así que se puede hacer uso de $\sim Q$ como una **hipótesis auxiliar** la cual se llamará **negación de la tesis**, al momento de encontrar la contradicción necesaria se hace uso del símbolo $\Rightarrow\Leftarrow$ para indicar tal situación; la contradicción puede ser con la hipótesis o con un resultado matemático que sea válido.

Ejemplo 4.41. *Si* $a > 0$ *entonces* $\frac{1}{a} > 0$

Demostración [Método Indirecto, Prosa]

La hipótesis en este caso es que $a > 0$, la negación de la tesis implica que $\frac{1}{a} \leq 0$, multiplicando esta desigualdad por a que es positivo, dicha desigualdad se conserva (ver ejemplo 4.9), por lo que $a \cdot \frac{1}{a} \leq a \cdot 0$ (1), por la propiedad del inverso aditivo $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ y además $a \cdot 0 = 0$, entonces la expresión (1) equivale a $1 \leq 0$ ($\Rightarrow\Leftarrow$), lo cual es una contradicción y por lo tanto se sigue que $\frac{1}{a} > 0$ es verdadera. $\square$

El siguiente ejemplo se demostró en el ejemplo 4.38 por medio del método del contrarrecíproco, a continuación se hará uso del método indirecto para demostrar dicha propiedad.

Ejemplo 4.42. *Si n^2 es par entonces n es par.*

Demostración [Método Indirecto, Afirmación-razón]

1. n^2 es par	... Hipótesis
2. n es impar	... Negación de la tesis
3. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k+1$	... Definición de número impar en 2
4. $n^2 = (2k+1)^2$	... Elevando al cuadrado en 3
5. $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$	... Trinomio cuadrado en 4
6. $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$	... Distributiva en 5
7. $n^2 = 2r + 1$ con $r \in \mathbb{Z}$	... Clausurativa en 6
8. n^2 es impar	... Definición de número impar en 7
9. (n^2 es par) $\wedge$ (n^2 es impar)	... Conjunción entre 1 y 8
$\Rightarrow\Leftarrow$	... Un número entero no es a la vez par e impar
10. n es par	... Método indirecto en 2

Ejemplo 4.43. *Si n^2 es divisible por 3 entonces n es divisible por 3.*

Demostración [Método Indirecto, Método de Casos, Prosa]

Por hipótesis se tiene que n^2 es divisible por 3, que en términos de divisibilidad se escribe como $3|n^2$. La negación de la tesis consiste en que n no es divisible por 3 ($3 \nmid n$), con base en la definición de no-divisibilidad, existen enteros k y r para los que $n = 3k + r$ donde r tiene solo dos posibilidades $r = 1$ o $r = 2$; por medio del trinomio cuadrado perfecto se tiene que $n^2 = (3k+r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2$ (1).

Caso i: Consideremos el caso en que $r = 1$ de donde la expresión (1) se escribe como $n^2 = 9k^2 + 6k + 1$ que por la propiedad distributiva $n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, y así $n^2 = 3z + 1$, donde se sigue que $3 \nmid n^2$ ($\Rightarrow\Leftarrow$) lo cual contradice la hipótesis $3|n^2$.

Caso ii: Si $r = 2$ entonces la igualdad (1) se escribe como $n^2 = 9k^2+12k+4 = 9k^2+12k+3+1$ con base en la propiedad distributiva y clausurativa resulta $n^2 = 3(k^2+4k+1)+1 = 3z_1+1$ por lo que $3 \nmid n^2$ y así se genera la contradicción. $\square$

Ejemplo 4.44. $[\sim (A \wedge B) \wedge (\sim C \to A) \wedge (\sim B \to C)] \to C$ *es una proposición verdadera.*

Demostración [Método Indirecto, Afirmación-razón]

1. $\sim (A \wedge B) \wedge (\sim C \to A) \wedge (\sim B \to C)$	...Hipótesis
2. $\sim C$	...Negación de la tesis
3. $\sim (A \wedge B)$	...Simplificación en 1
4. $\sim C \to A$	...Simplificación en 1
5. $\sim B \to C$	...Simplificación en 1
6. $\sim A \vee \sim B$	...Ley de D'Morgan en 3
7. A	...Modus ponendo ponens entre 2 y 4
8. $\sim B$	...Modus tolendo ponens entre 6 y 7
9. C	...Modus ponendo ponens entre 8 y 5
10. $\sim C \wedge C$	...Conjunción entre 2 y 9
$\Rightarrow\Leftarrow$	...Por tabla de verdad de la conjunción
11. C	...Método indirecto en 2

El método de reducción al absurdo se utiliza cuando en el enunciado del teorema aparezcan expresiones sobre irracionalidad o el conjunto vacío, así como en situaciones donde no exista la definición de los objetos a trabajar. En el siguiente ejemplo se demostrará que $\sqrt{2}$ no es un número racional, es decir, $\sqrt{2}$ es un número irracional. En el caso en que se tengan dos números pares puede ocurrir el caso en que $m.c.d.(p,q) = 2$ por ejemplo si $p = 2$ y $q = 24$, sin embargo puede suceder que $m.c.d.(p,q) \geq 2$ haciendo $p = 4$ y $q = 36$. Tenga en cuenta que en el siguiente enunciado no hay hipótesis.

Ejemplo 4.45. *$\sqrt{2}$ no es un número racional.*

Demostración [Método Indirecto, Prosa]

Supongamos por el contrario que $\sqrt{2}$ es racional, por lo que existen enteros p y q con $q \neq 0$ y $m.c.d.(p,q) = 1$ tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, al elevar al cuadrado y utilizar propiedades de potenciación resulta $2 = \frac{p^2}{q^2}$, multiplicando por q^2 a ambos lados escribimos $2q^2 = p^2$ (1) en cuyo caso se sigue que p^2 es par, de donde p es par (ver ejemplo 4.38) así p se puede escribir de la forma $p = 2k$ (2) donde k es un número entero, sustituyendo (2) en (1) se obtiene $2q^2 = 4p^2$ que por la propiedad cancelativa $q^2 = 2p^2$ y así q^2 es par que por un razonamiento análogo q es par. Ya que tanto p como q son pares entonces $m.c.d.(p,q) \geq 2$ ($\Rightarrow\Leftarrow$) lo cual está en contradicción con el hecho que $m.c.d.(p,q) = 1$. Así $\sqrt{2}$ es irracional. $\square$

Ejemplo 4.46. *Si m y n son enteros tales que $n + n^2 + n^3 = m + m^2$ entonces n es par.*

Demostración [Método Indirecto, Afirmación-razón]

1. $n + n^2 + n^3 = m + m^2$	... Hipótesis
2. n es impar	... Negación de la tesis
3. Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $n = 2k + 1$	... Definición de número impar en 2
4. $(2k + 1) + (2k + 1)^2 + (2k + 1)^3 = m + m^2$	... Sustitución de 3 en 2
5. $(2k+1)+(4k^2+4k+1)+(8k^3+12k^2+6k+1) = m+m^2$	... Propiedades de potenciación en 4
6. $8k^3 + 16k^2 + 12k + 2 + 1 = m + m^2$	... Suma de términos semejantes en 5
7. $2(4k^3 + 8k^2 + 6k + 1) + 1 = m + m^2$	... Distributiva en 6
8. $2r + 1 = m + m^2$ con $r \in \mathbb{Z}$	... Clausurativa en 7
9. $m + m^2$ es impar	... Definición de número impar en 8
10. $m + m^2$ es par	... Ejemplo 4.33
11. $(m + m^2$ es par$) \wedge (m + m^2$ es impar$)$	... Conjunción entre 9 y 10
$\Rightarrow\Leftarrow$	... Un entero es par o impar
12. n es par	... Método indirecto en 2

Ejemplo 4.47. *La multiplicación de un número racional diferente de cero por un número irracional es otro número irracional.*

Demostración [Método Indirecto, Prosa]

De acuerdo con el enunciado del teorema se requiere un número racional diferente de cero, llámese p (con $p \neq 0$) y un número irracional llámese ψ, puesto que debe demostrarse que $p \cdot \psi$ es irracional entonces se supondrá que es racional, por lo que existen enteros m y $n \neq 0$ para los que $p \cdot \psi = \frac{m}{n}$ (1). Ahora bien, ya que $p \in \mathbb{Q}$ entonces existen enteros m_1 y $n_1 \neq 0$ tales que $p = \frac{m_1}{n_1}$ donde además $m_1 \neq 0$ ya que $p \neq 0$; sustituyendo en la igualdad (1) se escribe $\frac{m_1}{n_1} \cdot \psi = \frac{m}{n}$ que al multiplicar a ambos lados por $\frac{n_1}{m_1}$ resulta $\psi = \frac{n_1}{m_1} \cdot \frac{m}{n} = \frac{n_1 \cdot m}{m_1 \cdot n}$, por la propiedad clausurativa se tiene que $\psi = \frac{m_2}{n_2}$ donde $n_2 \neq 0$ (por ser $m_1 \neq 0$ y $n \neq 0$) así ψ es un número racional ($\Rightarrow\Leftarrow$), lo cual contradice el hecho que ψ es irracional, con esto se concluye que $p \cdot \psi$ es irracional. $\square$

4.7. Inducción Matemática

EL principio de inducción matemática es un método que se aplica siempre que se esté trabajando sobre la base del conjunto de los números naturales, principio que sirve para demostrar las generalizaciones de las propiedades que cumplen algunos de los objetos matemáticos.

En este método se verifica en primera instancia que la proposición sea cierta para un primer elemento, luego se supone cierta para un elemento k y se demuestra la veracidad para el siguiente número $k+1$ a partir del elemento k. El principio se asemeja al **efecto dominó** donde los dominos se ubican verticalmente y se disponen siguiendo una secuencia, de tal manera que al dejar caer el primer dominó esté afecta los demás.

Ejemplo 4.48. *¿A cuánto equivale la suma de los cien primeros naturales?*

Para dar respuesta a esta pregunta se suman el primer y último término, segundo y penúltimo y así sucesivamente, es por ello que 1+2+3+...+98+99+100 resulta 101+101+...+101, donde el número 101 se repite 50 veces debido a que son 100 números, es por ello que $1+2+3+\ldots+98+99+100 = 50 \cdot 101$, donde 101 es la suma de 100 y 1 y 50 es la mitad de los números, se escribe $1+2+3+\ldots+98+99+100 = \frac{100}{2} \cdot (100+1)$ Parece entonces que al tratar de sumar los números naturales comenzando en 1 hasta un n fijo se presenta la igualdad

$$1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1)+n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

Donde n es un natural cualquiera y la igualdad anterior depende solo de dicho número. El proceso anterior consistió en obtener una proposición general a partir de proposiciones particulares; a este proceso se le llama **inducción**. Pero se debe tener especial cuidado con el razonamiento inductivo, puesto que puede conducir tanto a conclusiones falsas así como verdaderas.

Ejemplo 4.49. *Sea $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$ donde n es un número natural; determinar una regla general para S_n.*

En el caso en que $n=1$ resulta $S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$, para $n=2$ se tiene $S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, para 3 y 4 se encuentra $S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$ y $S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$. Analizando estos cuatro casos se encuentra una regla general para la suma S_n donde

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Esto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 4.50. *Sea $f(x) = x^2 + x + 41$ con $x \in \mathbb{N}$ ¿Es $f(x)$ primo para todo x?*

Si se reemplaza la x por el número uno, se obtiene el número primo $f(1) = 43$. Si se continúa reemplazando la x por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, sucesivamente, se obtiene en cada uno de los casos, un número primo: $f(2) = 47$, $f(3) = 53$, $f(4) = 61$, $f(5) = 71$, $f(6) = 83$, $f(7) = 97$, $f(8) = 113$, $f(9) = 131$, $f(10) = 151$. Para dar respuesta a la pregunta original se hace $x = 40$ para que resulte la expresión $f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot (40 + 1) = 41^2$, el cual es un número compuesto ya que se puede dividir por 1, 41 y 41^2, y así la función $f(x) = x^2 + x + 41$ no genera números primos para todo $x \in \mathbb{N}$. Recuerde que no existe una forma recursiva que genere todos los números primos.

En los ejemplos, el razonamiento empleado condujo a establecer una proposición general para n o para x, a partir de unas proposiciones verdaderas para ciertos valores particulares de n o x. Así las proposiciones obtenidas en los ejemplos 4.48 y 4.49 son verdadera, como se demostrará posteriormente; no obstante, la proposición general del ejemplo 4.50 es falsa, puesto que sólo se obtienen números primos para $1, 2, 3, \ldots, 38, 39$, y cuando $x = 40$ el valor de la función $f(x) = x^2 + x + 41$ es $f(40) = 41^2$ que es un número compuesto. Este ejemplo ilustra un hecho sencillo pero importante: "*Una proposición puede ser verdadera en muchos casos especiales, sin embargo, no cumplirse en general.*"

El principio de inducción matemática se aplica cuando se está trabajando sobre el conjunto de los números naturales, es decir, cuando aparezcan expresiones como para todo $n \in \mathbb{N}$ (o para todo $n \geq k$ donde k es un natural fijo mayor que la unidad) se verifica cierta propiedad. Para ello es necesario tener presente los tres pasos siguientes en dicho orden, donde $P(n)$ es la proposición a demostrar

1. **Verificar para el primer elemento**: Es decir, mostrar que la propiedad se cumple para el primer elemento que no necesariamente tiene que ser el 1, $P(1)$ o $P(r)$ siendo r el primer término que debe cumplir.

2. **Hipótesis inductiva**: Suponer que la propiedad es cierta para un cierto $k \in \mathbb{N}$ fijo y mayor que el primer elemento, $P(k)$ es verdadera.

3. **Tesis Inductiva**: Demostrar que la propiedad se cumple para el elemento $k + 1$, es decir, para el siguiente de k, $P(k + 1)$ es verdadera.

La hipótesis inductiva se puede variar donde la propiedad sea cierta para un $k-1$, se escribe $P(k - 1)$ es cierta; con esta hipótesis la tesis inductiva debe cumplirse en términos de k (el siguiente de $k - 1$), esto es, $P(k)$ es verdadera. A continuación se demuestra la veracidad de dicho principio.

Teorema 4.1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $P(n)$ una proposición sobre n. Supóngase que*

1. *$P(1)$ es verdadera*

2. *Si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k + 1)$ también es cierta*

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración [Método Indirecto, Prosa]

Se quiere demostrar que si se cumplen las condiciones 1 y 2, entonces $P(n)$ es verdadera para todo número natural n. Utilizando una demostración indirecta, se tiene que si $P(n)$ no fuera verdadera para todo número natural, habría un número natural, llámese m, el menor de todos para los cuales la proposición es falsa. Por la condición 1, $m \neq 1$ (por que 1 cumple la proposición P y m no la cumple) de manera que $m > 1$, por lo que $m-1$ es un número natural. Debido a que m es el menor natural para el cual la proposición es falsa, entonces la proposición es verdadera para $m-1$, pero falsa para $(m-1)+1 = m$; esto contradice la condición 2. Por lo tanto, la proposición debe ser verdadera para todo natural. □

Ejemplo 4.51. *Demostrar que $S_n : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Este resultado se obtuvo en el ejemplo 4.49.*

Demostración [Principio de inducción, Prosa]

En el caso en que $n = 1$ se tiene $S_1 : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ lo cual hace que la proposición sea verdadera para el primer elemento. Supongamos ahora que es verdadera para $k \in \mathbb{N}$, para lo que

$$S_k : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1} \qquad \text{Hipótesis inductiva}$$

Y demostremos que $S_{k+1} : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$ la cual representa la tesis inductiva. Sumando a ambos lados de la hipótesis inductiva el término $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ resulta

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Por suma de fracciones y propiedad distributiva, la igualdad anterior se escribe como

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \; (1)$$

Como el término k^2+2k+1 se puede escribir como $(k+1)^2$ por ser un trinomio cuadrado perfecto entonces en la igualdad (1)

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

En este caso se simplificaron los términos semejantes. La anterior igualdad representa la tesis inductiva, así la proposición S_{k+1} es cierta siempre que S_k sea cierta, por el principio de inducción matemática, teorema 4.1, se concluye que

$$S_n : \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

es una proposición verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejemplo 4.52. *Demostrar que* $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, enunciado que se obtuvo en el ejemplo 4.48*

Demostración [Principio de inducción, Afirmación-razón]

Considérese la proposición

$$P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

En el caso en que $n = 1$ se tiene que $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ por lo $P(1)$ es cierta. Si $P(k)$ es verdadera para $k \in \mathbb{N}$ entonces

$$P(k) : 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{Hipótesis inductiva}$$

Veamos que $P(k+1) : 1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ es verdadera.

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ . . . Hipótesis Inductiva
2. $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$ . . . Sumando $k+1$ en 1
3. $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$ . . . Suma de fracciones en 2
4. $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ . . . Distributiva en 3

Por la expresión obtenida en el paso 4 se sigue que $P(k+1)$ es verdadera siempre que $P(k)$ lo sea y así $P(n) : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Ejemplo 4.53. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se cumple que* $(n+1)! = (n+1)n!$

Demostración [Principio de Inducción, Afirmación-razón]

Si hacemos que $n = 1$ resulta la igualdad $2! = 2 = 2 \cdot 1! = 2$, por lo que la proposición es verdadera para el primer elemento. Supongamos ahora que la propiedad es válida para k

por lo que $(k+1)! = (k+1)k!$ (hipótesis inductiva) y demostremos que se satisface para $k+1$, es decir, $(k+2)! = (k+2)(k+1)!$

1. $(k+1)! = (k+1)k!$ ... Hipótesis Inductiva
2. $(k+2)! = ((k+1)+1)!$ ... Propiedad de reales
3. $(k+2)! = ((k+1)+1)(k+1)!$ ... Utilizando 1 en 2
4. $(k+2)! = (k+2)(k+1)!$ ... Propiedad de reales en 3
5. $(n+1)! = (n+1)n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ... Principio de inducción 4.1

Ejemplo 4.54. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$ *esto para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración [Principio de Inducción, Prosa]

En este caso se considera la proposición

$$P(n) : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Para $n = 1$ resulta $1 \cdot 1! = 1$ y $(1+1)! - 1 = 2 - 1 = 1$ por lo que $P(1)$ es verdadera. Supongamos ahora que $P(k)$ es verdadera para $k \in \mathbb{N}$, esto es

$$P(k) : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)! - 1 \quad \text{(Hipótesis inductiva)}$$

Y se demuestra que $P(k+1)$ es cierta, lo cual es equivalente a

$$P(k+1) : 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1 \quad \text{(Tesis Inductiva)}$$

Puesto que $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! = (k+1)! - 1$ es verdadero por ser la hipótesis inductiva entonces al sumar a ambos lados el término $(k+1) \cdot (k+1)!$ resulta

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = [(k+1)! - 1] + (k+1) \cdot (k+1)!$$

Por las propiedades en los enteros como la asociativa, conmutativa y distributiva se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! &= (k+1)! + [-1 + (k+1) \cdot (k+1)!] \\ &= (k+1)! + [(k+1) \cdot (k+1)! - 1] \\ &= [(k+1)! + (k+1) \cdot (k+1)!] - 1 \\ &= (k+1)!(k+1+1) - 1 = (k+2)(k+1)! - 1 \quad (1) \end{aligned}$$

En el ejemplo 4.53 se demostró que $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$, por lo que $(k+2)! = (k+2)(k+1)!$ y así en la igualdad (1) se obtiene $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + k \cdot k! + (k+1) \cdot (k+1)! = (k+2)! - 1$, es decir, la proposición es cierta para $k+1$ y se concluye entonces que

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$$

Es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver teorema 4.1). $\square$

Ejemplo 4.55. $n < 2^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración [Principio de Inducción, Afirmación-razón]

En este caso el primer elemento es el 1 ya que la propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo que si sustituye n por 1 resulta $1 < 2$ lo cual es cierta. Supongamos ahora que se cumple para un k específico así $k < 2^k$ (hipótesis inductiva) y demostremos que se cumple para $k+1$ es decir, $(k+1) < 2^{k+1}$.

1. $k < 2^k$	... Hipótesis Inductiva
2. $2k < 2 \cdot 2^k$	... Multiplicando por 2 en 1
3. $2k < 2^{k+1}$	... Propiedades de potenciación en 2
4. $1 \leq k$	... Propiedad de los naturales
5. $k+1 \leq k+k$	... Sumando k a ambos lados en 4
6. $k+1 \leq 2k$	... Suma de términos semejantes en 5
7. $k+1 < 2^{k+1}$	... Transitividad entre 3 y 6
8. $n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$	... Principio de Inducción 4.1

Consideremos la diferencia $8^n - 3^n$ donde n es un número natural, en el caso en que $n = 1$ la diferencia se escribe como $8 - 3 = 5$, para $n = 2$, $8^2 - 3^2 = 55$, para $n = 3$, $8^3 - 3^3 = 485$, nótese que cada uno de los resultados obtenidos es un número divisible por 5 ya que terminan en 5, así que es posible inferir que $8^n - 3^n$ es divisible por 5 independiente del valor de $n \in \mathbb{N}$, en el siguiente ejemplo se demuestra esta situación. En general, si a y b son números enteros, entonces $a - b$ divide a $a^n - b^n$ para cualquier n, no hay dificultad en que a y b sean enteros, consideremos el caso de $(-10)^n - (-3)^n$ para los tres primeros términos se obtiene -7, 91, -973, todos números divisibles por $-7 = -10 - (-3)$ y por ende también divisibles por 7.

Ejemplo 4.56. $8^n - 3^n$ *es divisible por* 5 *para todo* $n \in \mathbb{N}$

Demostración [Principio de inducción, Prosa]

El enunciado se puede reescribir como $5|(8^n - 3^n)$ para $n = 1$ se sigue que $5|5$ lo cual es cierto. Supongamos ahora que se cumple para k entonces $5|(8^k - 3^k)$ (hipótesis inductiva) y veamos que $5|(8^{k+1} - 3^{k+1})$.

Con base en la hipótesis inductiva se tiene que $5|(8^k - 3^k)$, que por la definición de divisibilidad existe $r \in \mathbb{Z}$ tal que $8^k - 3^k = 5r$, multiplicando a ambos lados por 8 y haciendo uso de las propiedades de potenciación resulta $8(8^k - 3^k) = 40r$ equivalente a $8^{k+1} - 8 \cdot 3^k = 40r$, puesto que $8 = 5 + 3$ entonces $8^{k+1} - (5 + 3) \cdot 3^k = 40r$, por la propiedad distributiva $8^{k+1} - 5 \cdot 3^k - 3^{k+1} = 40r$, sumando $5 \cdot 3^k$ a ambos lados resulta $8^{k+1} - 3^{k+1} = 40r + 5 \cdot 3^k$ en el lado derecho se aplica la propiedad distributiva y clausurativa para lograr $8^{k+1} - 3^{k+1} = 5[8r + 3^k] = 5z$ donde $z \in \mathbb{Z}$, así $5|(8^{k+1} - 3^{k+1})$ y la tesis inductiva se cumple. Con base en el teorema 4.1 se concluye que $5|(8^n - 3^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Los ejemplos anteriores representan casos directos de la aplicación del método de inducción matemática. En casos más complicados, según sea la proposición, hay que modificar el enunciado de las dos condiciones.

1. En ocasiones, para probar que la proposición es verdadera para $n = k + 1$, se requiere saber que la proposición es verdadera para $n = k$ y $n = k - 1$; es decir, los dos números que preceden a $k + 1$. En tales casos, de la condición 2. del teorema 4.1 se necesitaría probar la aseveración para dos valores consecutivos de n.

2. A veces se desea probar una proposición para todos los valores de n mayores que o iguales a algún entero no negativo m. En estos casos se verifica, en la primera parte de la demostración, que la proposición es verdadera para $n = m$, y, si es necesario, para determinados valores de n. Por ejemplo, en algunos casos se encuentran proposiciones que deben probarse para todos los valores no negativos n $(n \geq 0)$. En dichos casos, la primera parte de la demostración se prueba para $n = 0$; en la segunda parte se procede de manera usual.

Ejemplo 4.57. $2^n < n!$ *para todo natural* $n \geq 4$.

Demostración [Principio de Inducción, Prosa]

En este caso el primer elemento es el 4 de acuerdo con el enunciado, sustituyendo n por 4 resulta $16 < 24$ que es cierta. Supongamos ahora que se cumple para k esto es $2^k < k!$ (hipótesis inductiva) y demostremos que se cumple para $k + 1$ es decir, $2^{k+1} < (k + 1)!$.

Por la hipótesis inductiva $2^k < k!$ entonces al multiplicar a ambos lados por 2 resulta $2^{k+1} < 2 \cdot k!$ (1). Como $1 \leq k$ para $k \in \mathbb{N}$, expresión que es equivalente a $2 \leq k + 1$, al multiplicar a ambos lados por $k!$ (positivo) se tiene $2 \cdot k! \leq (k + 1) \cdot k!$, con base en el ejemplo 4.53 se sigue que $2 \cdot k! \leq (k + 1)!$ y así por transitividad con la desigualdad (1) se obtiene $2^{k+1} < (k + 1)!$, por lo que se satisface la tesis inductiva. Con base en el principio de inducción se concluye que $2^n < n!$ para todo natural mayor o igual que 4. $\square$

Ejemplo 4.58. *Si* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ *y* $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ *entonces* $1 \leq x_n \leq 2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración [Principio de Inducción, Afirmación-razón]

En este caso la proposición es cierta para $n = 1$ y $n = 2$, ya que $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Supongamos que la propiedad se cumple para $k - 1$ y para k en los naturales, por lo que

$$1 \leq x_{k-1} \leq 2 \quad \text{y} \quad 1 \leq x_k \leq 2 \qquad \text{Hipótesis inductiva}$$

Veamos que la condición se cumple para $k + 1$, es decir, $1 \leq x_{k+1} \leq 2$ (tesis inductiva)

1. $1 \leq x_{k-1} \leq 2$ ... Hipótesis Inductiva
2. $1 \leq x_k \leq 2$ ... Hipótesis Inductiva
3. $2 \leq x_{k-1} + x_k \leq 4$ ... Sumando las desigualdades en 1 y 2
4. $\frac{1}{2} \cdot 2 \leq \frac{1}{2}[x_{k-1} + x_k] \leq \frac{1}{2} \cdot 4$ ... Multiplicando por $\frac{1}{2}$ en 3
5. $1 \leq \frac{1}{2}[x_{k-1} + x_k] \leq 2$ ... Propiedad de los reales en 4
6. $1 \leq x_{k+1} \leq 2$ ... Por ser $x_{n+2} = \frac{1}{2}[x_n + x_{n+1}]$ en 5
7. $1 \leq x_n \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ... Principio de inducción

Ejemplo 4.59. *Se cumple la identidad*

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\ldots\cos(2^n\alpha) = \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin(\alpha)}$$

Para todo α *en los reales tales que* $\sin(\alpha) \neq 0$ *y* $n \geq 0$.

Demostración [Principio de Inducción, Prosa]

En la trigonometría circular se demuestra que $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ (1), de donde se deduce que $\cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{2\sin(\alpha)}$, esto siempre que $\sin(\alpha) \neq 0$. es por ello que para $n = 0$ se presenta la igualdad. Supongamos ahora que la propiedad es cierta para k en los naturales, así

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\ldots\cos(2^k\alpha) = \frac{\sin(2^{k+1}\alpha)}{2^{k+1}\sin(\alpha)} \quad \text{Hipótesis inductiva}$$

Se prueba a continuación que la propiedad es cierta para $k + 1$, es decir

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\ldots\cos(2^k\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha) = \frac{\sin(2^{k+2}\alpha)}{2^{k+2}\sin(\alpha)} \quad \text{Tesis inductiva}$$

Si se multiplica la hipótesis inductiva por el término $\cos(2^{k+1}\alpha)$ se tiene

$$\begin{aligned}\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\ldots\cos(2^k\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha) &= \frac{\sin(2^{k+1}\alpha)}{2^{k+1}\sin(\alpha)}\cos(2^{k+1}\alpha)\\ &= \frac{\sin(2^{k+1}\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha)}{2^{k+1}\sin(\alpha)} \qquad (2)\end{aligned}$$

Puesto que $\sin(\beta)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\sin(2\beta)$ de acuerdo con la igualdad presentada en (1), entonces si se hace $\beta = 2^{k+1}\alpha$ se obtiene $\sin(2^{k+1}\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2\cdot 2^{k+1}\alpha) = \frac{1}{2}\sin(2^{k+2}\alpha)$ que al sustituir en la igualdad (2) se tiene

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\ldots\cos(2^k\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha) = \frac{1}{2}\frac{\sin(2^{k+2}\alpha)}{2^{k+1}\sin(\alpha)} = \frac{\sin(2^{k+2}\alpha)}{2^{k+2}\sin(\alpha)}$$

Debido a que la tesis inductiva se cumple, entonces por el principio de inducción se concluye que

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)\ldots\cos(2^n\alpha) = \frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin(\alpha)}$$

es una proposición cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

4.8. Ejercicios

Método Directo

Con base en la definición de números pares e impares demostrar

1. La suma de un número par y un número impar es un número impar.
2. La suma de tres números impares es impar.
3. El producto de un número par y un número impar es un número par.
4. El producto de cuatro números impares es un número impar.
5. Si n es impar entonces n^4 y n^5 son impares.
6. Si n es par entonces n^2 y n^3 son pares.

Sean m, n, p y q enteros. Demuestre las siguientes propiedades de divisibilidad

7. Si $m \mid n$ entonces $m \mid n^k$ con k natural.
8. Sea c un entero tal que $c \neq 0$. $m \mid n$ *sii* $mc \mid nc$.
9. Si $m \mid n$ entonces $m \mid (-n)$.
10. Si $m \mid n$ y $k \in \mathbb{N}$ entonces $m^k \mid n^k$.
11. Si $m \mid n$ y $p \mid q$ entonces $mp \mid nq$.
12. Si $m \cong n \mod r$ entonces $n \cong m \mod r$
13. Si $m \cong m \mod r$.
14. Si $m \cong n \mod r$ entonces $cm \cong cn \mod r$ siendo $c \in \mathbb{Z}$
15. Si $m \cong n \mod r$ entonces $m^k \cong n^k \mod r$
16. Si $m \cong n \mod r$ y $p \cong q \mod r$ entonces $m + p \cong n + q \cong \mod r$

Sean a, b reales positivos y x, y, z, w reales cualesquiera, entonces

17. Si $a < b$ entonces $a^2 < b^2$
18. $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$
19. si $a < b$ entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
20. $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$
21. si $x < y$ y $z < w$ entonces $x + z < y + w$.
22. Se define la media aritmética como $\frac{a+b}{2}$ y la media geométrica como $\sqrt{ab}$. Demuestre que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Sean x, y y z números reales, demuestre que

23. Si $x + y = x + z$ entonces $y = z$.
24. Si $p, q \in \mathbb{Q}$ entonces $(p + q)$ es un número racional.
25. Si $xy = xz$ y $x \neq 0$ entonces $y = z$.
26. Si $p, q \in \mathbb{Q}$ y $q \neq 0$ entonces $\frac{p}{q}$ es un número racional.
27. Si $p, q \in \mathbb{Q}$ entonces pq es un número racional.
28. Si $p \in \mathbb{Q}$ entonces $2p$ y p^2 son racionales.

Sean z y z_1 números complejos; demuestre las siguientes propiedades

29. $z - \overline{z} = 2Im(z)$
30. $|\overline{z}| = |z|$
31. $\overline{\overline{z}} = z$
32. Si $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$ con $|z| \neq 0$ entonces $zz^{-1} = 1$
33. $|z| \geq |Re(z)|$
34. $\frac{z}{\overline{z}} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2}i$
35. $\overline{\left(\frac{z}{z_1}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z_1}}$
36. $|z+z_1|^2+|z-z_1|^2 = 2(|z|^2+|z_1|^2)$ identidad del paralelogramo.

Método de Casos

Si tanto n como m son números enteros entonces demostrar las siguientes propiedades

1. Si n es entero entonces $n^3 + n^2$ es par.
2. El producto de tres enteros consecutivos es un número par.
3. Si n es entero entonces $n^3 + 3n^2 + 2n$ es par.
4. Si $m \mid n$ y $n \mid m$ entonces $m = n$ o $m = -n$.
5. El producto de dos enteros consecutivos es un entero par.

Sean x, y números reales demuestre que

6. $- \mid x \mid \leq x \leq \mid x \mid$
7. $\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{|y|}{|x|}$ con $x \neq 0$
8. Si $x = 0$ o $y = 0$ entonces $xy = 0$
9. Sea $a \in \mathbb{R}^+$. $\mid x \mid \leq a$ sii $-a \leq x \leq a$
10. Si $xy = 0$ entonces $x = 0$ o $y = 0$
11. Sea $a \in \mathbb{R}^+$, si $a \leq \mid x \mid$ entonces $a \leq x$ o $x \leq -a$

Método del Contraejemplo

Las siguientes propiedades están dadas para todo x, y y z en los reales.

1. $x^2 + y^2 = (x + y)^2$
2. $\mid x + y \mid = \mid x \mid + \mid y \mid$
3. Si $x < y$ entonces $cx < cy$
4. $|cx| = c|x|$
5. Si $xy = xz$ entonces $y = z$
6. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq 2$
7. $x^2 > x$
8. $x^2 + y^2 \leq 2xy$
9. Si x e y son reales negativos y $\frac{y}{x} > 1$ entonces $y - x > 0$
10. $||x| - |y|| \geq |x - y|$
11. (n+m)!=n!+m! donde n, m son naturales
12. La multiplicación de dos irracionales es otro irracional
13. Se verifica $\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ para todo x, y, z en los reales
14. Sean a, b, c, x, y, z con b, x, z no ceros. Si $\frac{a}{b} < \frac{c}{x} < \frac{y}{z}$ entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c+y}{b+x+z} < \frac{y}{z}$

Reducción al absurdo

1. Si n^2 es divisible por 5 entonces n es divisible por 5, con $n \in \mathbb{Z}$
2. Demuestre que $\sqrt{5}$ es irracional.
3. Si n^2 es impar entonces n es impar.
4.
5. La suma de un irracional y un racional es un irracional.
6.
7. Si n^3 es divisible por 2 entonces n es divisible por 2, con $n \in \mathbb{Z}$
8. Demuestre que $\sqrt[3]{2}$ es irracional.

Inducción Matemática

1. $1 + 4 + 7 + 11 + \ldots + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1)$
2. $7n < 2^n$, $\forall n \geq 6$
3. $3^n \geq 2n + 1$
4. $3^n \geq n^3$, $\forall n \geq 4$
5. $1 + 2n < 3^n$
6. $n^3 + 2n$ es dividido por 3 para todo $n \in \mathbb{N}$
7. $a^n - b^n$ es divisible por $a - b$
8. $1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$
9. $2^n \leq (n + 1)!$
10. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$
11. $n^3 + 1 > n^2 + n$, $\forall n \geq 2$
12. $(\forall n \in \mathbb{N})$, 4 no divide a $n^2 + 2$
13. $3|(4^n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$
14. $(1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$
15. $1 + 3^2 + 5^2 + \ldots (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$
16. $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} \ldots + \frac{1}{4n^2-1} = \frac{n}{2n+1}$
17. $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ con $y \neq 0$
18. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Misceláneos

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$.
2. $\mid -x \mid = \mid x \mid$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
3. $\mid y - x \mid = \mid x - y \mid$ con $x, y \in \mathbb{R}$.
4. 15 divide a 2^{4n-1} para todo $n \in \mathbb{N}$.
5. Sean x, y números reales. Si $x < y$ entonces $-y < -x$.
6. Si p es un número racional no cero y pq es un racional entonces q es un racional.
7. Demuestre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.
8. $4|(9^n - 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
9. $\mid x + y \mid \leq \mid x \mid + \mid y \mid$ (Desigualdad Triangular)
10. Sean n y m números naturales tales que $x < y$ entonces $x + 1 \leq y$.
11. m divide a $|m|$, con $m \in \mathbb{Z}$
12. $2n < 2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
13. 64 es un factor de $7^{2n} + 16n - 1$.
14. Si x e y son reales negativos y $\frac{y}{x} > 1$ entonces $x - y > 0$
15. Sean x, y reales tales que $x < y$, demuestre que $x < \frac{x+y}{2} < y$.
16. Sean ξ y ζ números irracionales tales que $\xi + \zeta$ es un racional. Demuestre que $\xi - \zeta$ y $\xi + 2\zeta$ son irracionales.

17. Sean n y m números naturales tales que $x < y+1$ entonces $x \leq y$.

18. Si n y m son enteros y nm es impar entonces n es impar y m es impar.

19. Sean m y n números enteros con $m|n$ y c un número entero entonces $m|nc$

20. Sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < 1$ entonces $x^2 < x$

21. Sean m y n números enteros con $n \neq 0$. Si $m|n$ entonces $|n| \geq |m|$.

22. Demuestre que si ξ es un número irracional entonces $\sqrt{\xi}$ es un número irracional.

23. Sean m y n enteros enteros tales que $m|n$ entonces $|m|$ divide a $|n|$.

24. $(1+x)^n > 1+nx$ para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ y $x > -1$.

25. $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

26. Demuestre que $5|(4^{2n}-1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

27. La suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es divisible por nueve.

28. $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

29. $(x-y)$ es factor de $(x^{2n-1}-y^{2n-1})$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

30. Sea ξ un número irracional entonces $\frac{1}{\xi}$ es un número irracional.

31. $(a+b)^n < 2^{n-1}(a^n+b^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

33. Demuestre las siguientes propiedades por medio del principio de inducción matemática

  a) $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

  b) $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

  c) $\sin(\alpha)+\sin(2\alpha)+\sin(3\alpha)+\ldots+\sin(n\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(n+1)\alpha\right)\sin\left(\frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$

  d) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

  e) Sea $U_n = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$ para $\alpha \neq \beta$, es decir, $U_1 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}$, $U_2 = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$. Demostrar que para todo $n > 2$ se cumplen las relaciones $U_n = (\alpha+\beta)U_{n-1}$ y $U_n = \alpha\beta U_{n-2}$

34. Sean $b_1 = aq_1+r_1$ y $b_2 = aq_2+r_2$ con cada b_i, q_i y r_i números enteros para $i = 1,2$ y $a \in \mathbb{Z}$. Demuestre que $a|(b_1-b_2)$ si y sólo si $r_1 = r_2$.

35. Sea $p \neq 0$ un número racional y ξ un número irracional entonces $\frac{\xi}{p}$ es un número irracional.

36. Demuestre que
$$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$$
es un número entero para todo $n \in \mathbb{N}$.

37. Sean $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complejos tales que $|z_i| \leq 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son reales positivos tales que $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n = 1$ entonces
$$\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i z_i\right| \leq 1$$

4.9. Resumen Conceptual

1. **Método Directo**: Se aplica en enunciados de la forma $P \to Q$, donde se supone P como verdadera, hipótesis, y a través de una secuencia lógica (que depende de los objetos matemáticos) para deducir Q, tesis.

2. **Método Contraejemplo**: Este método consiste en exhibir un ejemplo que no cumpla la proposición dada.

3. **Método de Casos**: En los enunciados de la forma $P_1 \vee P_2 \to Q$, en la hipótesis resulta la disjunción $P_1 \vee P_2$, el método de casos consiste en suponer P_1 como cierta y concluir Q $(P_1 \to Q)$ a este se le llama el caso i; luego se supone P_2 como verdadero y se demuestra Q de nuevo $(P_2 \to Q)$ que es el caso ii. Es decir, en cada caso se debe demostrar la misma tesis.

4. **Método del Contrarrecíproco**: Algunos condicionales de la forma $P \to Q$ no son sencillos de demostrar, para ello se hace uso del contrarrecíproco $\sim Q \to \sim P$ y se demuestra éste condicional de forma directa.

5. **Método Indirecto**: Cuando el condicional $P \to Q$ no es posible demostrarlo de manera directa o a través del contrarrecíproco, se niega tal condicional $\sim (P \to Q)$ que equivale a $P \wedge \sim Q$, donde P (hipótesis) y $\sim Q$ (negación de la tesis) se asumen como verdaderas hasta llegar a una contradicción que se expresa $\Rightarrow\Leftarrow$, lo cual implica que $\sim (P \to Q)$ es falso y por tanto $P \to Q$ es verdadero. Este método se utiliza en general cuando los objetos matemáticos no tienen una definición precisa: Irracionales, el conjunto vacío, entre otros.

6. **Método de Inducción**: La base para la aplicación del método de inducción matemática son los números naturales. Se aplica en tres pasos: En el primero se verifica que la proposición dada sea verdadera para el primer elemento, en un segundo momento se supone que la proposición es cierta para un cierto $k \in \mathbb{N}$ (hipótesis inductiva) y el tercer paso es que demostrar que la proposición es cierta para $(k+1) \in \mathbb{N}$ (Tesis inductiva).

Capítulo 5

Teoría de Conjuntos

5.1. Ideas Preeliminares

Los conceptos de conjuntos y elementos se consideran como **primitivos** dentro de la teoría ya que no admiten una definición precisa, nos acercamos a dichos conceptos a través de las nociones (ideas intuitivas) que se tienen sobre los mismos.

Noción de Conjunto: Es una colección de objetos (personas, animales, cosas) Se denotan con letras mayúsculas latinas $A, B, \ldots$ o por medio de subíndices $A_1, A_2, \ldots$ (indexados).

Noción de Elemento: Son los objetos que conforman el conjunto. Se denotan con letras latinas minúsculas $x, y, z, \ldots$.

Los conjuntos pueden escribirse de dos formas

1. **Extensión**: Se listas todos o algunos elementos del conjunto.
2. **Compresión**: Se enuncia una regla de formación que describa todos los elementos de dicho conjunto.

Ejemplo 5.1. *El conjunto de todas las potencias de 2 mayores que 10 y menores que 300, se puede representar como* $A = \{16, 32, 64, 128, 256\}$ *la cual está presentada por extensión, mientras que* $A = \{10 < 2^n < 300 : n \in \mathbb{N}\}$ *que está dada por compresión ya que* $10 < 2^n < 300$ *representa la regla de formación.*

Ejemplo 5.2. *El conjunto de todos los divisores de 36 se representa como* D_{36} *y está dado por* $D_{36} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm9, \pm12, \pm18, \pm36\}$ *que está representado por extensión,* *mientras que por compresión, se escribe* $D_{36} = \{n \in \mathbb{Z} : n|36\}$.

Ejemplo 5.3. *El conjunto de las potencias de* -1 *se escribe por extensión y compresión como* $P = \{-1, 1\} = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$.

Los conjuntos pueden representarse de dos forma, por medio de un **Diagrama de Venn** en el cual los conjuntos se representan por medio de óvalos, donde un cuadrado circunscribe dichos conjuntos, conjunto que es llamado **Universal** o **Referencial** y que es representado por medio de la letra U. La otra representación es llamada **Diagrama de Carroll** en honor de Lewis Carroll (ver [7]), en el que los conjuntos se representan por medio de rectángulos. La primera representación se limita a tres conjuntos, es por ello que se utilza los diagramas de Carroll para la representación de más de tres conjuntos.

El conjunto que carece de elementos se denomina **conjunto vacío** y representa por medio de ϕ. Cada demostración que implique el conjunto vacío se hará por medio del método indirecto, ya que la definición de tal conjunto es en sí una contradicción.

El número de elementos de un conjunto, sea finito o infinito, se le llama **cardinal** idea introducida por George Cantor con la intensión de comparar el tamaño de conjuntos infinitos como los naturales y reales. Para el conjunto A se escribe $card(A)$ para representar dicho número, otras representaciones son $n(A)$, $\sharp(A)$ o $|A|$, la primera será la notación utilizada en estas notas.

Ejemplo 5.4. *El conjunto* $A = \{|x| : -2 \leq x < 10 \ \wedge x \in \mathbb{Z}\}$ *está conformado por los números* $A = \{2, 1, 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *el cual posee 10 elementos, por lo que escribimos* $card(A) = 10$.

Ejemplo 5.5. *El conjunto* $B = \{(-1)^n + (-1)^m : n, m \in \mathbb{N}\}$ *solo está conformado por los números* $B = \{0, 2, -2, \}$, *donde el elemento 2 surge cuando n y m son pares, el elemento -2 resulta al ser ambos impares y 0 se presenta cuando uno es par y el otro es impar. En este caso se tiene que* $card(B) = 3$.

Ejemplo 5.6. *En el caso del conjunto vacío se sigue que* $card(\phi) = 0$, *propiedad que se demostrará posteriormente en el teorema 5.14; sin embargo no es el único conjunto que tiene cardinal cero, como la ecuación* $x^4 + 1 = 0$ *en los reales no tiene solución entonces el conjunto* $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$ *tiene cardinal cero,* $card(A) = 0$.

Ejemplo 5.7. *El conjunto* $C = \mathbb{N}$ *posee infinitos elementos, por efectos prácticos dicho cardinal se representa como* $\mathcal{N}_0$ *el cual se lee* ***Alef-cero***, *y escribimos* $card(\mathbb{N}) = \mathcal{N}_0$.

Aquellos conjuntos que poseen igual cardinal que los naturales se denominan ***numerables****. Veamos la siguiente tabla*

n	*Par*	*Impar*	*Múltiplos de 3*	*Potencias de 2*
1	$2 = 2 \cdot 1$	$1 = 2(1) - 1$	$3 = 3 \cdot 1$	$2 = 2^1$
2	$4 = 2 \cdot 2$	$3 = 2(2) - 1$	$6 = 3 \cdot 2$	$4 = 2^2$
3	$6 = 2 \cdot 3$	$5 = 2(3) - 1$	$9 = 3 \cdot 3$	$8 = 2^3$
4	$8 = 2 \cdot 4$	$7 = 2(4) - 1$	$12 = \cdot 4$	$16 = 2^4$

Se tiene que para cada natural n hay un entero par que es positivo, de allí que el cardinal del conjunto de números pares es el mismo que de los naturales; situación análoga ocurre con los impares, los múltiplos de 3*, las potencias de* 2 *y otros más conjuntos infinitos como es el caso de los números irracionales.*

Un tercer concepto primitivo en la teoría de conjuntos es la **Relación de pertenencia**, la cual se simboliza con la letra $\in$ y permite relacionar los elementos con un conjunto, así $x \in A$ significa que el objeto x hace parte del conjunto A o x es un elemento del conjunto A, mientras que $x \notin A$ significa que x no es un elemento del conjunto A.

Ejemplo 5.8. *Sea $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ : x|28 \wedge x|42\}$, es decir, dicho conjunto está conformado por los divisores comunes de los enteros* 28 *y* 42*, de allí que $A = \{1, 2, 7\}$, haciendo uso de la relación de pertenencia se escribe $0 \notin A$, $1 \in A$, $4 \notin A$ y $7 \in A$.*

Ejemplo 5.9. *Consideremos el conjunto $B = \{1, 2, \{1\}, \{1, 2\}, 3, \phi\}$, es decir, B es un conjunto que contiene otros conjuntos como los son $\{1\}$, $\{1, 2\}$ y el vacío, en cuyo caso se transforman en elementos y escribimos $\{1\} \in B$, $\{1, 2\} \in B$, $\phi \in B$, $3 \in B$ pero $\{3\} \notin B$; además $card(B) = 6$.*

5.2. Sistema Formal

El sistema formal relativo a la teoría de conjuntos se basa en los sistemas de la lógica proposicional y cuantificacional. En los ejemplos previos, los objetos o elementos de los conjuntos han sido números pero no son los únicos conjuntos que existen. Se hará uso del símbolo $\in$ de la relación de pertenencia como elemento propio del alfabeto.

5.2.1. Alfabeto

1. Los símbolos para nombrar conjuntos y para nombrar elementos, las letras del alfabeto, mayúsculas para conjuntos y minúsculas para elementos.

2. El símbolo de la relación de pertenencia entre un elemento y su conjunto: $\in$.

3. El símbolo de la relación de igualdad entre objetos: $=$.

4. Los símbolos lógicos de la lógica proposicional y cuantificacional: $\sim$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción), $\rightarrow$ (condicional), $\longleftrightarrow$ (bicondicional), $\forall$ (cuantificador universal), $\exists$ (cuantificador existencial).

5. Signos auxiliares: Paréntesis que abren y que cierran (,).

5.2.2. Reglas de Formación

1. Si P_x y Q_x son fórmulas, también lo son $\sim P_x$, $P_x \wedge Q_x$, $P_x \vee Q_x$, $P_x \rightarrow Q_x$ y $P_x \longleftrightarrow Q_x$ para cualquier x.

2. Si P_x es una fórmula entonces $(\forall x)(P_x)$ y $(\exists x)(P_x)$ son fórmulas también.

3. Las fórmulas del lenguaje solo se generan mediante las reglas anteriores.

5.2.3. Axiomas

El primer axioma relaciona los objetos de un conjunto por medio de la relación de igualdad, para lo que se presenta las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva; además se presenta la propiedad de sustitución, la cual indica que si dos objetos son iguales entonces al ejemplificar la función proposicional, las dos proposiciones resultantes son equivalentes.

Axioma 5.1. ***Relación entre elementos*** *Para los elementos de un conjunto A se verifica*

i. ***Reflexiva****: Si x es un elemento entonces $x = x$*

ii. ***Simétrica****: Si x, y son elementos tales que $x = y$ entonces $y = x$*

iii. ***Transitiva****: Si x, y, z son elementos tales que $x = y$ y $y = z$ entonces $x = z$*

iv. ***Sustitución****: Si x, y son elementos tales que $x = y$ y R_x es una función proposicional cuya variable es x entonces $(a/x)\, R_x \longleftrightarrow (b/x)\, R_x$*

El segundo axioma garantiza la existencia de un conjunto, lo cual es necesario para dar validez a los teoremas de la teoría de conjuntos. El axioma tres indica que la relación de pertenencia $\in$ es exclusivo entre elementos y conjuntos en este orden; y no entre elementos.

Axioma 5.2. ***Axioma de Existencia*** *Existe al menos un conjunto.*

Axioma 5.3. ***Axioma de Objeto*** *Si A es un conjunto y $a \in A$ entonces $a \notin a$.*

5.2.4. Teoremas

El conjunto $\{5\}$ posee un elemento, es por ello que su cardinal es 1, mientras que 5 es el elemento que conforma dicho conjunto unitario de allí que $5 \neq \{5\}$, pues el primero es un elemento y el segundo un conjunto, se enuncia esta propiedad como el primer teorema del sistema forma de la teoría de conjuntos. Los teoremas que se presentan a continuación tienen un referente histórico en la paradoja de Russell.

Teorema 5.1. *Si x es un objeto entonces $x \neq \{x\}$.*

Demostración [Método Indirecto, Prosa]

Razonando por el absurdo se tiene que $x = \{x\}$. Puesto que $x \in \{x\}$, por ser x su único elemento; por el axioma de sustitución 5.1, $x \in x$; pero por el axioma de objeto 5.3 se sabe que $x \notin x$, lo cual es una contradicción ($\Rightarrow\Leftarrow$); así $x \neq \{x\}$. $\square$

Teorema 5.2. *Si A es un conjunto entonces $A \notin A$.*

Demostración [Método Indirecto, Prosa]

Supongamos que $A \in A$ (1), entonces se puede decir que A es un elemento que se puede denotar como a; al sustituir en la expresión (1) se sigue que $a \in a$; pero, por el axioma de objeto se sabe que $a \notin a$ ($\Rightarrow\Leftarrow$) con esto se concluye que $A \notin A$. $\square$

Teorema 5.3. *La colección de todos los conjuntos no es un conjunto.*

Demostración [Método Indirecto, Prosa]

Supongamos que el conjunto de todos los conjuntos si es un conjunto, llámese B, ya que dicho conjunto debe contener a todos los conjuntos entonces se debe contener a así mismo, es por ello que B es un elemento de B, por lo que $B \in B$ lo cual contradice el teorema 5.2 ($\Rightarrow\Leftarrow$), por la contradicción se sigue que B no puede ser un conjunto y así el conjunto de todos los conjuntos no es un conjunto. $\square$

Ejemplo 5.10. *Sean $A = \{(-1)^n + 2 : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : n|3\}$ conjuntos presentados por compresión, si se escriben por extensión se sigue que $A = \{1, 3\}$ y $B = \{1, 3\}$, es decir, los conjuntos A y B tienen los mismo elementos, por lo que escribimos $A = B$; de la igualdad de los conjuntos se sigue la igualdad de los cardinales.*

En el ejemplo 5.10 los conjuntos A y B son iguales debido a que poseen los mismo elementos, esto se formaliza diciendo que dos conjuntos son iguales si al considerar un elemento x en el conjunto A dicho elemento también está en el conjunto B, se escribe $x \in A \rightarrow x \in B$ y viceversa, es decir, si $x \in B$ entonces $x \in A$, $x \in B \rightarrow x \in A$; ambos condicionales dan pie a un bicondicional como se presenta en el axioma 5.4.

Axioma 5.4. ***Axioma de Extensión*** *Los conjuntos A y B son iguales, se escribe $A = B$, si y solo si* $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$

El axioma de extensión caracteriza la igualdad entre conjuntos, en el siguiente teorema se presentan las propiedades de la igualdad entre conjuntos, entre las que se encuentra la propiedad reflexiva, simétrica y transitiva. La demostración de dicho teorema se basa en el teorema de equivalencia 2.9 de la lógica proposicional.

Teorema 5.4. ***Propiedades de la igualdad de Conjuntos*** *Sean A, B y C conjuntos entonces*

1. ***Reflexiva*** $A = A$
2. ***Simétrica*** *Si* $A = B$ *entonces* $B = A$
3. ***Transitiva*** *Si* $A = B$ *y* $B = C$ *entonces* $A = C$.

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

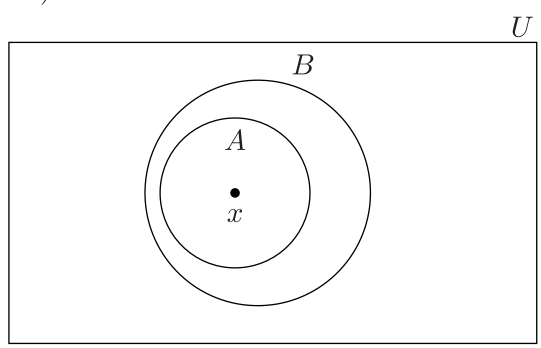
1. $a \in A \leftrightarrow a \in A$	... Medio excluido (ver 2.9)
2. $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in A)$	... Generalización del $\forall$ en 1
3. $A = A$	... Axioma de extensión (5.4) en 3
4. $A = B$	... Hipótesis
5. $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	... Axioma de extensión en 4
6. $(\forall x)(x \in B \leftrightarrow x \in A)$	... Teorema de equivalencia en 5
7. $B = A$	... Axioma de extensión en 6
8. $A = B$	... Hipótesis
9. $B = C$	... Hipótesis
10. $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	... Axioma de extensión en 8
11. $(\forall x)(x \in B \leftrightarrow x \in C)$	... Axioma de extensión en 9
12. $a \in A \leftrightarrow a \in B$	... Ejemplificación (a/x) en 10
13. $a \in B \leftrightarrow a \in C$	... Ejemplificación (a/x) en 11

14. $a \in A \leftrightarrow a \in C$ ... Transitividad del $\leftrightarrow$ entre 12 y 13
15. $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in C)$ ... Generalización del $\forall$ en 14
16. $A = C$ ... Axioma de extensión en 15

Ejemplo 5.11. *Consideremos que n es un número entero, el cual genera los conjuntos $A = \{n : 1 \leq n^3 < 30\}$ y $B = \{|n| : -3 \leq n \leq 5\}$, donde $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 2, 1, 0, 4, 5\}$. En dicho caso todos los elementos del conjunto A son elementos del conjunto B, se dice que A está incluido en B o que A es un subconjunto de B y se escribe $A \subset B$.*

Con base en el ejemplo 5.11 resulta que A es subconjunto de B si para x en A, x es un elemento en B, lo cual se escribe como $x \in A \to x \in B$, sin embargo el recíproco de dicho condicional no es cierto, es decir, si x es un elemento en B, x no necesariamente es un elemento en A; esto se formaliza en la siguiente definición.

Definición 5.1. ***Definición de Inclusión*** *Sean A y B conjuntos, se dice que $A \subset B$ si y sólo si* $(\forall x)(x \in A \to x \in B)$



$x \in A \to x \in B$
$A \subset B$

El hecho que $A \subset B$ se lee también como "A es parte de B", "A está contenido en B", "B contiene a A" o "B incluye a A". La inclusión entre conjuntos indica que todos los elementos de A son elementos del conjunto B, pero no al contrario, en este caso se dice que A es un subconjunto propio de B. El símbolo $A \subseteq B$ indica que se presenta una de las dos posibilidades $A \subset B$ o $A = B$.

Si A no es un subconjunto de B se escribe $A \not\subseteq B$ donde al negar la proposición dada en la definición 5.1 resulta $\sim (\forall x)(x \in A \to x \in B)$, que por las propiedades de la lógica cuantificacional y proposicional se escribe

$$\sim (\forall x)(x \in A \to x \in B) \leftrightarrow (\exists x)(x \in A \wedge x \notin B) \tag{5.1}$$

Es decir, si A no es un subconjunto de B debe existir un elemento en A pero no en B.

Ejemplo 5.12. *En los conjunto A, B y C que se presentan a continuación, n es un entero, donde $A = \{n : 0 < n^2 - n \leq 12\}$, $B = \{n : n|12\}$ y $C = \{-2 - (-1)^n : n \in \mathbb{Z}\}$ por lo que $A = \{-3, -2, -1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$ y $C = \{-3, -1\}$. De acuerdo con estos conjuntos se tiene que $C \subset A$ y $A \subset B$; como además $C \subset B$ entonces la propiedad transitiva para la inclusión de conjuntos se satisface como se demuestra en el siguiente teorema.*

Teorema 5.5. ***Propiedades de la inclusión de Conjuntos*** *Sean A, B y C conjuntos entonces*

1. ***Reflexiva*** $A \subseteq A$
2. *Si $A \subset B$ entonces $A \subseteq B$*
3. *$A = B$ si y sólo si $A \subset B$ y $B \subset A$*
4. ***Transitiva*** *Si $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$*

Demostración [Método Directo, Método de Casos, Prosa]

Debido a que $A = A$ por el teorema 5.4 entonces por el axioma de adjunción resulta $(A = A) \vee (A \subset A)$, lo cual implica que $A \subseteq A$ y así la propiedad reflexiva respecto de $\subseteq$ se satisface. Para la demostración del segundo literal se tiene por hipótesis que $A \subset B$, al adjuntar la expresión $A = B$ se tiene $(A \subset B) \vee (A = B)$, de lo cual se concluye $A \subseteq B$.

Para la demostración del literal 3 es necesario la verificación de dos condicionales, se inicia de izquierda a derecha.

"$\Rightarrow$" En este caso la hipótesis es que $A = B$, por el axioma de extensión se tiene que $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, haciendo uso de la ejemplificación se escribe $a \in A \leftrightarrow a \in B$ que por la definición de bicondicional resulta $(a \in A \to a \in B) \wedge (a \in B \to a \in A)$ (1). Simplificando en (1) se obtiene el condicional $a \in A \to a \in B$ lo cual por generalización del cuantificador universal se tiene $(\forall x)(x \in A \to x \in B)$ que por la definición de inclusión $A \subset B$ (2). Si en (1) se simplifica el segundo condicional $a \in B \to a \in A$ se demuestra de igual forma que $B \subset A$ (3); por conjunción entre (2) y (3) se concluye que $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

"$\Leftarrow$" En este caso se supone que $A \subset B$ y $B \subset A$ son ciertas, por la definición de inclusión 5.1 se tiene que $(\forall x)(x \in A \to x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \to x \in A)$, por medio de las propiedades del cuantificador universal resulta la expresión $(\forall x)(x \in A \to x \in B \wedge x \in B \to x \in A)$ y así por la definición del bicondicional $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ y concluir que $A = B$.

Para la demostración del literal 4, por hipótesis se tiene que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, hipótesis que generan cuatro casos, el primero a considerar es que $A = B$ y $B = C$, por el teorema 5.4 resulta $A = C$, que por adjunción se concluye $A \subseteq C$.

El segundo caso a considerar es que $A = B$ y $B \subset C$, por sustitución $A \subset C$ y por el literal 2 de este teorema $A \subseteq C$. Si hacemos ahora que $A \subset B$ y $B = C$ entonces al sustituir queda $A \subset C$ y así $A \subseteq C$.

El cuarto y último caso es que se presenten las inclusiones propias $A \subset B$ y $B \subset C$, por la definición de inclusión se escribe $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ y $(\forall x)(x \in B \rightarrow x \in C)$, al ejemplificar resultan los condicionales $a \in A \rightarrow a \in B$ y $a \in B \rightarrow a \in C$, que por el teorema de transitividad (ver 2.1) de la lógica proposicional se tiene $a \in A \rightarrow a \in C$, se generaliza $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in C)$ y por definición de inclusión $A \subset C$, y concluir en cada caso que $A \subseteq C$. $\square$

Axioma 5.5. *Si X es un conjunto y A es una colección de objetos tal que $A \subset X$ entonces A es un conjunto.*

Axioma 5.6. ***Axioma del conjunto vacío*** *La colección de todos los objetos tales que $x \in A$ y $x \notin A$ es un conjunto llamado vacío, esto es $\phi := \{x : x \in A \land x \notin A\}$ donde A es un conjunto.*

Con base en el axioma del conjunto vacío se tiene que si x es un elemento del conjunto vacío entonces $x \in A \land x \notin A$, se escribe $x \in \phi \leftrightarrow x \in A \land x \notin A$; al hacer esta consideración se obtiene una contradicción puesto que un elemento no puede hacer parte de un conjunto y no hacer parte al mismo tiempo, esto se escribe en términos de la lógica proposicional como $P \land \sim P$, cuya tabla de verdad genera una contradicción.

Por la propiedad de D'Morgan (ver 2.15) se sigue que $x \notin \phi$ es equivalente a

$$x \notin \phi \leftrightarrow \sim (x \in A \land x \notin A) \leftrightarrow x \notin A \lor x \in A \tag{5.2}$$

Cada una de las propiedades que implique el conjunto vacío deben demostrarse por medio del método indirecto, ya que la misma definición genera una contradicción. En el teorema 5.6 se demuestra que el vacío no posee elementos y que además es un subconjunto de cualquier conjunto.

Teorema 5.6. ***Propiedades del conjunto vacío*** *Sea A un conjunto entonces*

1. $(\forall x)(x \notin \phi)$

2. $\phi \subseteq A$

Demostración [Método Indirecto, Afirmación-razón]

1. $\sim (\forall x)(x \notin \phi)$	... Negación de la tesis
2. $(\exists x)(x \in \phi)$	... Negación del cuantificador universal en 1
3. $a \in \phi$	... Ejemplificación (a/x) en 2
4. $a \in A \wedge a \notin A$	... Axioma del conjunto vacío (5.6) en 3
$\Rightarrow\Leftarrow$	... Tabla de verdad de $P \wedge \sim P$
5. $(\forall x)(x \notin \phi)$	... Método Indirecto en 1
6. $\phi \nsubseteq A$	... Negación de la tesis
7. Existe a tal que $a \in \phi \wedge a \notin A$	... Negación de la inclusión en 6
8. $a \in \phi$	... Simplificación en 7
$\Rightarrow\Leftarrow$	... El vacío carece de elementos, propiedad anterior
9. $\phi \subset A$	... Método indirecto en 6
10. $\phi \subseteq A$	... Adjunción en 9

Sea A el conjunto determinado por $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 - 1 = 0\}$. Al factorizar la expresión $x^2 - 1 = 0$ resulta que los dos posibles valores que puede asumir la variable son $x = 1$ y $x = -1$, sin embargo, el conjunto A solo está dado por $A = \{1\}$ ya que x debe ser un número natural, en dicho caso se tiene que $A \subset \mathbb{N}$ y el conjunto de los naturales actúa como el conjunto de referencia o también llamado universal denotado con la letra U. Al cambiar el conjunto referencial, sus subconjuntos pueden variar notablemente, por ejemplo, si $A = \{x : x^2 + 1 = 0\}$ equivalente a la solución de la ecuación $x^2 = -1$, en el caso en que el conjunto referencial sean los reales $U = \mathbb{R}$ entonces $A = \phi$, mientras que si se hace $U = \mathbb{C}$ (números complejos) entonces $A = \{i, -i\}$. Estos casos motivan la definición siguiente.

Definición 5.2. ***Conjunto Universal*** *El conjunto* $U := \{x : x \in A \vee x \notin A\}$ *se llama conjunto universal o referencial, donde* A *es un conjunto arbitrario.*

Por lo tanto $x \in U$ siempre que $x \in A \vee x \notin A$ para A un conjunto arbitrario, se escribe $x \in U \leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$, en términos de la lógica proposicional se escribe $P \vee \sim P$, proposición que es cierta debido al teorema del medio excluido (ver 2.2). En el caso en que $x \notin U$ entonces por la propiedad de D'Morgan se tiene la equivalencia

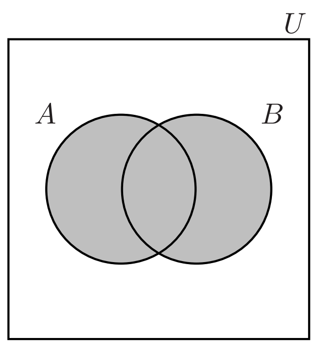
$$x \notin U \leftrightarrow x \notin A \wedge x \in A \tag{5.3}$$

Lo cual es una contradicción ya que se escribe $P \wedge \sim P$, la equivalencia 5.3 tiene una relación directa con el axioma del conjunto vacío (5.6), para lo que $x \notin U \leftrightarrow x \in \phi$ y viceversa $x \notin \phi \leftrightarrow x \in U$.

5.3. Operaciones entre conjuntos

Intuitivamente, una operación entre conjuntos se puede tomar como una regla tal que al relacionar de determinada manera dos conjuntos, el resultado es un tercer conjunto: Entre las operaciones usuales de conjuntos se encuentran la unión, la intersección, la diferencia y la diferencia simétrica, además del complemento. Tales operaciones tienen una relación directa con los operadores de la lógica proposicional, además de una representación gráfica en un diagrama de Venn a partir de áreas sombreadas.

Consideremos que un elemento x está en la unión entre los conjuntos A y B, se escribe $x \in (A \cup B)$ siempre que x sea un elemento en la región sombreada que aparece a continuación



Consideremos las proposiciones P: "$x \in A$" y Q: "$x \in B$", con base en el gráfico relativo a la unión, un elemento x tiene cuatro posibilidades para ser ubicado

1. El elemento x está en A y en B por lo que las proposiciones P y Q son verdaderas. De igual forma la proposición $x \in (A \cup B)$ es verdadera ya que el elemento se encuentra en la región sombreada.

2. El elemento x está en A pero no en B de allí que P es una proposición verdadera, pero Q falsa; mientras que la proposición $x \in (A \cup B)$ es verdadera.

3. El elemento x no está en A pero sí en B, para esta situación la proposición P es falsa y Q es verdadera, donde $x \in (A \cup B)$ es una proposición verdadera.

4. La última alternativa es que x no esté ni en A ni en B lo que produce que las proposiciones P y Q sean falsas; para esta situación la proposición $x \in (A \cup B)$ es falsa ya que x no está en la región sombreada.

En la siguiente tabla se resume esta situación.

Casos	$x \in (A \cup B)$	P: "$x \in A$"	Conector	Q: "$x \in B$"
1	V	V		V
2	V	V		F
3	V	F		V
4	F	F		F

Nótese que el conector de lógica proposicional que produce que esta tabla de verdad sea una tautología es la disjunción, así $x \in (A \cup B)$ es equivalente a la proposición $(x \in A) \vee (x \in B)$, esto induce la siguiente definición.

Definición 5.3. ***Unión entre conjuntos*** *Sean A y B conjuntos entonces*

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

representa la unión entre los conjuntos A y B.

Se escribe $x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$; es decir, un elemento x pertenece a la unión entre dos conjuntos A y B si está en cualquiera de los dos o en lo dos. Si x no es un elemento de la unión ($x \notin (A \cup B)$) entonces con base en la definición 5.3 y la propiedad D'Morgan resulta

$$x \notin (A \cup B) \leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \tag{5.4}$$

Por lo que el elemento x no pertenece a la unión si y sólo si no pertenece ni al conjunto A ni al conjunto B.

Ejemplo 5.13. *Sean $A = \{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$, $B = \{x + 7 : x = -6, -7, -8, -9\}$ y $C = \{-3, -2, -1, 0\}$ conjuntos. Para determinar que elementos conforman el conjunto A es necesario factorizar la expresión $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ para lo que $x(x-1)(x-2) = 0$, con base en esto, los conjuntos A y B se escriben como $A = \{0, 1, 2\}$ y $B = \{1, 0, -1, -2\}$.*

En este caso $A \cup B = \{0, 1, 2, -1, -2\}$, mientras que $B \cup A = \{1, 0, -1, -2, 2\}$, es decir, $A \cup B = B \cup A$, por lo que se deja entrever que la unión entre conjuntos cumple la propiedad conmutativa, además se presentan las inclusiones entre conjuntos $A \subset A \cup B$ y $B \subset A \cup B$. Al unir el conjunto C con sí mismo resulta $C \cup C = \{-3, -2, -1, 0\} = C$ y así la propiedad de idempotencia parece ser válida. Debido a que $A \cup B = \{0, 1, 2, -1, -2\}$ entonces $(A \cup B) \cup C = \{0, 1, 2, -1, -2, -3\}$; por otro lado $B \cup C = \{1, 0, -1, -2, -3\}$ y así $A \cup (B \cup C) = \{0, 1, 2, -1, -2, -3\}$, con esto se concluye que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, es decir, se verifica la propiedad asociativa.

Teorema 5.7. ***Propiedades de la unión entre conjuntos*** *Sean A, B, C y D conjuntos y U el conjunto universal entonces*

1. ***Idempotencia*** $A \cup A = A$	*2.* ***Conmutativa*** $A \cup B = B \cup A$
3. ***Asociativa*** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	*4.* $A \subseteq A \cup B$ *y* $B \subseteq A \cup B$
5. $A \cup U = U$	*6.* $A \cup \phi = A$
7. Si $A \subseteq B$ *y* $C \subseteq D$ *entonces* $A \cup C \subseteq B \cup D$	*8. Si* $A \subseteq B$ *y* $C \subseteq B$ *entonces* $A \cup C \subseteq B$

Demostración [Método Directo, Prosa]

Con base en el teorema de idempotencia 2.10 se tiene que $a \in A \vee a \in A \leftrightarrow a \in A$, con base en la definición de unión 5.3 se escribe $a \in (A \cup A) \leftrightarrow a \in A$ al generalizar respecto del cuantificador universal se tiene $(\forall x)(x \in (A \cup A) \leftrightarrow x \in A)$ y por el axioma de extensión se concluye que $A \cup A = A$.

Ahora bien, por la propiedad conmutativa 2.8 la equivalencia $a \in A \vee a \in B \leftrightarrow a \in B \vee a \in A$ es cierta, en ambos casos se hace uso de la definición de unión $a \in (A \cup B) \leftrightarrow a \in (B \cup A)$, por la generalización universal se sigue que $(\forall x)(x \in (A \cup B) \leftrightarrow x \in (B \cup A))$ lo que permite concluir que $A \cup B = B \cup A$, es decir, la unión cumple la propiedad conmutativa.

Por la propiedad asociativa 2.16 respecto de la disjunción es verdadera la equivalencia

$$(a \in A \vee a \in B) \vee a \in C \leftrightarrow a \in A \vee (a \in B \vee a \in C)$$

Si en cada paréntesis se hace uso de la definición de unión resulta que la proposición $a \in (A \cup B) \vee a \in C \leftrightarrow a \in A \vee a \in (B \cup C)$ es verdadera, de nuevo se aplica dicha definición para lo que $a \in [(A \cup B) \cup C] \leftrightarrow a \in [A \cup (B \cup C)]$, por la generalización universal y el axioma de extensión se sigue que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Con base en el axioma de adjunción de la lógica proposicional es cierta la proposición $a \in A \rightarrow a \in A \vee a \in B$, equivalente a $a \in A \rightarrow a \in (A \cup B)$ (definición de unión) al generalizar respecto del cuantificador universal $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in (A \cup B))$, que por la definición de inclusión 5.1 se tiene que $A \subset A \cup B$, lo cual equivale a $A \subseteq A \cup B$ por el literal 2 del teorema 5.5 Por igual razonamiento se demuestra que $B \subseteq A \cup B$.

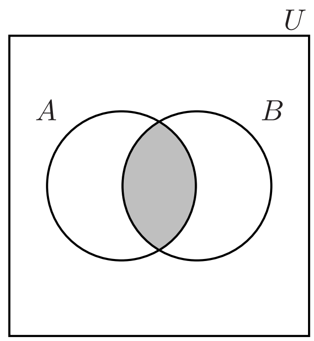
Demostremos ahora que $A \cup U = U$, con base en las propiedades de la lógica proposicional se obtienen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned} a \in (A \cup B) &\leftrightarrow a \in A \vee a \in U \\ &\leftrightarrow a \in A \vee (a \in A \vee a \notin A) \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow (a \in A \vee a \in A) \vee a \notin A$$
$$\leftrightarrow a \in A \vee a \notin A$$

Por la definición del conjunto universal se concluye que $A \cup U = U$. $\square$

La intersección, que se denota $\cap$, hace alusión a los elementos comunes entre los conjuntos A y B, es por esto que el conector a utilizar es la conjunción. El área sombreada que representa esta operación es



Por lo tanto, $x \in (A \cap B)$ si y solamente si $x \in A$ y $x \in B$.

Definición 5.4. ***Intersección entre conjuntos*** *Sean A y B conjuntos entonces*

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

representa la intersección entre los conjuntos A y B.

Con base en la definición, el hecho que un elemento x no esté en la intersección entre los conjuntos es por que $x \notin A \vee x \notin B$ como se presenta a continuación

$$x \notin (A \cap B) \leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \tag{5.5}$$

Se presenta así una relación directa entre la negación de la intersección con la unión y viceversa entre la negación de la unión con la intersección. En el caso en que la intersección entre dos conjuntos sea vacía ($A \cap B = \phi$) se dice que A y B son **conjuntos disjuntos**, es decir, dos conjuntos son disjuntos si no tienen elementos comunes. Si tanto A como B son el conjunto vacío entonces $\phi \cap \phi = \phi$, pues ϕ no tiene elementos y por tanto no hay elementos comunes, en general, para cualquier conjunto A se sigue que $A \cap \phi = \phi$. Mientras que $\phi \cup \phi = \phi$ por la propiedad de idempotencia.

Ejemplo 5.14. *Sean $A = \{n \in \mathbb{N} : 0 < n^2 < 20\}$ y $B = \{m \in \mathbb{N} : m|10\}$, bajo estas circunstancias ambos conjuntos se escriben como $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 2, 5, 10\}$, con base* *en la definición de la intersección de conjuntos 5.4, $A \cap B$ lo conforman aquellos elementos comunes es por esto que $A \cap B = \{1,2\} = B \cap A$, así como $A \cap A = \{1,2,3,4\} = A$ y las propiedades conmutativas e idempotencia son válidos así como en la unión.*

Ejemplo 5.15. *Sean $M_2 = \{n \in \mathbb{N} : 2|n\}$, $M_3 = \{n \in \mathbb{N} : 3|n\}$ y $M_4 = \{n \in \mathbb{N} : 4|n\}$, es decir, el conjunto M_2 son aquellos números enteros divisibles por 2, o enteros pares o múltiplos de 2, por extensión se escriben como $M_2 = \{2,4,6,8,\ldots\}$, $M_4 = \{4,8,12,16,\ldots\}$ y $M_3 = \{3,6,9,12,\ldots\}$. La intersección de M_2 y M_3 está representada como $M_2 \cap M_3 = \{6,12,18,24\ldots\}$ y representa los múltiplos de 6, se escribe $M_6 = M_2 \cap M_6$. Mientras que $M_4 \subset M_2$ por lo que $M_2 \cap M_4 = M_4$ y $M_2 \cup M_4 = M_2$, es decir, la intersección es el menor de los dos conjuntos: M_4 y la unión el mayor de ambos conjuntos: M_2.*

Teorema 5.8. ***Propiedades de la intersección entre conjuntos*** *Sean A, B, C y D conjuntos y U el conjunto universal entonces*

1. ***Idempotencia*** $A \cap A = A$
2. ***Conmutativa*** $A \cap B = B \cap A$
3. ***Asociativa*** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cap B \subseteq A$ *y* $A \cap B \subseteq B$
5. $A \cap U = A$
6. $A \cap \phi = \phi$
7. *Si* $A \subseteq B$ *y* $C \subseteq D$ *entonces* $A \cap C \subseteq B \cap D$
8. *Si* $A \subseteq B$ *y* $C \subseteq B$ *entonces* $A \cap C \subseteq B$
9. $A \subseteq B$ *si y sólo si* $A \cap B = A$

Demostración [Método Indirecto, Método Directo, Método de Casos, Afirmación-razón]

1. $A \cap \phi \neq \phi$	...Negación de la tesis literal 6
2. $(\exists x)(x \in (A \cap \phi))$	...Por ser $A \cap \phi$ no vacío en 1
3. $a \in A \wedge a \in \phi$	...Definición de intersección (5.4) en 2
4. $a \in \phi$	...Simplificación en 3
$\Rightarrow\Leftarrow$	...El vacío carece de elementos
5. $A \cap \phi = \phi$	...Método indirecto en 1

6. $A \subseteq B$	...Hipótesis literal 7
7. $C \subseteq D$	...Hipótesis
8. $(A \subset B) \wedge (C \subset D)$	...Caso i entre 6 y 7
9. $(a \in A \rightarrow a \in B) \wedge (a \in C \rightarrow a \in D)$	...Ejemplificación y definición de inclusión en 8
10. $(a \in A \wedge a \in C) \rightarrow (a \in B \wedge a \in D)$	...Adición entre implicaciones en 9
11. $a \in (A \cap C) \rightarrow a \in (B \cap D)$	...Definición de intersección en 10
12. $(\forall x)(x \in (A \cap C) \rightarrow x \in (B \cap D))$	...Generalización del $\forall$ en 11
13. $A \cap C \subset B \cap D$	...Definición de inclusión en 12
14. $A \cap C \subseteq B \cap D$	...Propiedades de la inclusión en 13

15. $A \subseteq B$ ... Hipótesis literal 8
16. $C \subseteq B$ ... Hipótesis
17. $A \cap C \subseteq B \cap B$ ... Utilización literal anterior entre 15 y 16
18. $A \cap C \subseteq B$ ... Idempotencia de la intersección en 17

$\Rightarrow$

19. $A \subseteq B$ ... Hipótesis literal 9
20. $A \cap B \subseteq A$ ... Literal 4 de este teorema
21. $A \subseteq A$ ... Reflexiva de la inclusión 5.5
22. $A \cap A \subseteq A \cap B$ ... Literal 7 de este teorema entre 19 y 21
23. $A \subseteq A \cap B$ ... idempotencia de la intersección en 22
24. $(A \cap B \subseteq A) \wedge (A \subseteq A \cap B)$ ... Conjunción entre 23 y 20
25. $A \cap B = A$ ... Propiedades de la inclusión en 24

$\Leftarrow$

26. $A \cap B = A$ ... Hipótesis
27. $a \in A$ ... Hipótesis auxiliar
28. $a \in (A \cap B)$ ... Axioma de extensión entre 26 y 27
29. $a \in A \wedge a \in B$ ... Definición de intersección en 28
30. $a \in B$ ... Simplificación en 29
31. $a \in A \rightarrow a \in B$ ... Método directo entre 27 y 30
32. $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ ... Generalización universal en 31
33. $A \subset B$ ... Definición de inclusión en 32
34. $A \subseteq B$ ... Propiedades de la inclusión en 33

Ejemplo 5.16. *Considérese los conjuntos* $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ *y* $C = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, *en este caso* $A \cap B = \{1, 2\}$ *y* $A \cap C = \{0, 1, 3\}$, *la unión de estos dos conjuntos precedentes conduce al conjunto* $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1, 2, 0, 3\}$ (1). *Por otro lado,* $B \cup C = \{-2, -1, 0, 1, 2, -3, 3\}$ *que al intersectarlo con el conjunto* A *se obtiene* $A \cap (B \cup C) = \{0, 1, 2, 3\}$ (2). *Entre las igualdades* (1) *y* (2) *se sigue que* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, *la cual representa la propiedad distributiva de la intersección respecto de la unión.*

En el siguiente teorema se enuncian las dos propiedades distributivas: De la unión respecto de la intersección y de la intersección respecto de la unión, las cuales se demuestran con base en el teorema 2.17 relativo a la propiedad distributiva de la lógica proposicional.

Teorema 5.9. ***Propiedad Distributiva*** *Sean* A, B *y* C *conjuntos entonces*

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Demostración [Método Directo, Prosa]

En la lógica proposicional se demostró la propiedad distributiva 2.17 para proposiciones donde

$$a \in A \wedge (a \in B \vee a \in C) \leftrightarrow (a \in A \wedge a \in B) \vee (a \in A \wedge a \in C)$$

Por las definiciones de unión e intersección la proposición anterior es equivalente a

$$a \in A \wedge a \in (B \cup C) \leftrightarrow a \in (A \cap B) \vee a \in (A \cap C)$$
$$a \in [A \cap (B \cup C)] \leftrightarrow a \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$$

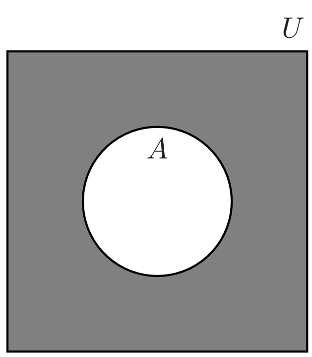
Con base en la generalización universal y en el teorema de extensión se concluye que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Iniciando con la proposición

$$a \in A \vee (a \in B \wedge a \in C) \leftrightarrow (a \in A \vee a \in B) \wedge (a \in A \vee a \in C)$$

Se demuestra de forma análoga que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $\square$

Definición 5.5. ***Complemento de un Conjunto*** *Sea A un subconjunto de U entonces el conjunto $A^c := \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$ es llamado el complemento de A respecto de U.*

Con base en la definición $x \in A^c$ si y solo si $x \in U \wedge x \notin A$, puesto que $x \in U$ es una proposición verdadera para todo x, ya que U es el conjunto universal entonces simplemente se escribe $x \in A^c \leftrightarrow x \notin A$. El hecho que $x \in A^c$ también se puede escribir por medio del concepto de negación como $\sim (x \in A)$, por lo que si $x \in A$ entonces con base en la doble negación resulta $\sim (x \notin A)$ y se escribe $x \in A \leftrightarrow \sim (x \notin A)$. En el siguiente gráfico se muestra por áreas sombreadas que es el complemento



Ejemplo 5.17. *Se asume como conjunto referencial a* $U = \{1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 9\}$ *y se consideran los subconjuntos* $A = \{n \in \mathbb{N} : n|12\}$ *y* $B = \{m : m^2 - 7m + 12 = 0\}$*, donde* $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ *y* $B = \{3, 4\}$*. Los complementos de ambos conjuntos respecto de* U *están dados por* $A^c = \{5, 7, 8, 9\}$ *y* $B^c = \{1, 2, 5, 6, 7, 8, 9\}$*, nótese que* $B \subset A$ *mientras que* $A^c \subset B^c$*. Además, al intersectar y unir un conjunto con su complemento resulta* $A \cup A^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = U$ *y* $A \cap A^c = \phi$*. Puesto que* $A^c = \{5, 7, 8, 9\}$ *entonces el complemento de este complemento está dado por* $(A^c)^c = \{1, 2, 3, 4, 6\} = A$*.*

Teorema 5.10. ***Propiedades del complemento de un conjunto*** *Sean* A *y* B *subconjuntos de* U *entonces*

1. $A = B$ *sii* $A^c = B^c$
2. $A \cup A^c = U$
3. $(A^c)^c = A$
4. $U^c = \phi$
5. $A \cap A^c = \phi$
6. $A \subseteq B$ *si y sólo si* $B^c \subseteq A^c$
7. $\phi^c = U$

Demostración [Método Directo, Método Indirecto, Afirmación-razón]

1. $\sim (a \notin A) \leftrightarrow a \in A$	. . . Doble negación
2. $\sim (a \in A^c) \leftrightarrow a \in A$	. . . Definición de complemento 5.5 en 1
3. $a \in (A^c)^c \leftrightarrow a \in A$	. . . Definición de complemento en 3
4. $(\forall x)(x \in (A^c)^c \leftrightarrow x \in A)$	. . . Generalización del $\forall$ en 3
5. $(A^c)^c = A$	. . . Axioma de extensión en 4
6. $a \in U \leftrightarrow a \in A \vee a \notin A$	. . . Definición del conjunto universal
7. $a \in U \leftrightarrow a \in A \vee a \in A^c$	. . . Definición del complemento en 6
8. $a \in U \leftrightarrow a \in (A \cup A^c)$	. . . Definición de unión en 7
9. $(\forall x)(x \in U \leftrightarrow x \in (A \cup A^c))$	. . . Generalización del $\forall$ en 8
10. $U = A \cup A^c$	. . . Axioma de extensión en 9
11. $A \cup A^c = U$	. . . Reflexiva de la igualdad en 10
12. $A \cap A^c \neq \phi$	. . . Negación de la tesis
13. $(\exists x)(x \in (A \cap A^c))$	. . . Por ser $A \cap A^c$ no vacío en 12
14. $a \in A \wedge a \in A^c$	. . . Definición de intersección en 13
15. $a \in A \wedge a \notin A$	. . . Definición de complemento en 14
16. $a \in \phi$	. . . Axioma del conjunto vacío en 15
$\Rightarrow\Leftarrow$	. . . El vacío carece de elementos
17. $A \cap A^c = \phi$	. . . Método indirecto en 12

18. $U^c \neq \phi$	...Negación de la tesis
19. $(\exists x)(x \in U^c)$	...Por ser U^c no vacío en 18
20. $a \notin U$	...Definición del complemento en 19
21. $a \in A \wedge a \notin A$	...Negación de la definición del conjunto U en 20
22. $a \in \phi$	...Axioma del conjunto vacío en 21
$\Rightarrow\Leftarrow$	...El vacío carece de elementos
23. $U^c = \phi$	...Método indirecto en 22

Ejemplo 5.18. *Sean* $A = \{2, 3, 5, 7\}$ *y* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *conjuntos enmarcados en el conjunto referencial* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, *en este caso* $A \cup B = \{2, 3, 5, 7, 1, 4\}$ *para lo que el complemento de la unión es* $(A \cup B)^c = \{6, 8\}$ (1). *Por otro lado, los complementos de* A *y* B *son* $A^c = \{1, 4, 6, 8\}$ *y* $B^c = \{6, 7, 8\}$ *cuya intersección es* $A^c \cap B^c = \{6, 8\}$ (2) *y entre los conjuntos* (1) *y* (2) *se escribe* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

En el ejemplo 5.18 se ilustró la propiedad de D'Morgan en términos de conjuntos, en este caso se presentó la negación de la unión pero también se presenta la negación de la intersección como se demostrará en el siguiente teorema para el cual es necesario hacer uso de la propiedad de D'Morgan de la lógica proposicional.

Teorema 5.11. ***Ley de D'Morgan*** *Sean* A *y* B *conjuntos entonces*

1. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
2. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Demostración [Método Directo, Prosa]

Por la ley de D'Morgan 2.15 resulta que $\sim (a \in A \wedge a \in B) \leftrightarrow (a \notin A \vee a \notin B)$, por la definición de la intersección se escribe $\sim (a \in (A \cap B)) \leftrightarrow (a \notin A \vee a \notin B)$, ahora bien, si se aplica la definición del complemento de un conjunto se obtiene la proposición equivalente $a \in (A \cap B)^c \leftrightarrow (a \in A^c \vee a \in B^c)$, y por la definición de unión

$$a \in (A \cap B)^c \leftrightarrow a \in (A^c \cup B^c)$$

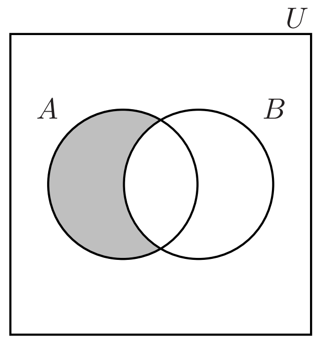
Con base en la generalización universal y el axioma de extensión se concluye que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$. Por igual vía se demuestra que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. $\square$

Definición 5.6. ***Diferencia entre conjuntos*** *Sean* A *y* B *conjuntos entonces el conjunto* $A - B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$ *se llama diferencia entre los conjuntos* A *y* B.

Con base en la definición se tiene $x \in (A - B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$, por lo que $x \notin (A - B)$ siempre que

$$x \notin (A - B) \leftrightarrow x \notin A \vee x \in B \tag{5.6}$$

En el siguiente esquema se representa la diferencia entre conjuntos.



Ejemplo 5.19. *El conjunto universal estará representado por* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, *mientras que* $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : n|6\}$ *y* $C = \{n \in \mathbb{N} : 4 < n^2 + 1 \leq 26\}$, *es decir, los conjuntos* B *y* C *se escriben como* $B = \{1, 2, 3, 6\}$ *y* $C = \{2, 3, 4, 5\}$. *En tal caso* $A - B$ *lo constituyen aquellos elementos que están en* A *pero no en* B, *es decir,* $A - B = \{4, 8\}$, *mientras que* $B - A = \{1, 3\}$, *así* $A - B \neq B - A$, *por lo que la propiedad conmutativa no se satisface. Ahora* $(A - B) - C = \{8\}$, *puesto que* $B - C = \{1, 6\}$ *entonces* $A - (B - C) = \{2, 4, 8\}$, *así* $(A - B) - C \neq A - (B - C)$, *no es tampoco asociativa la diferencia entre conjuntos. Por último los complementos de* A *y* B *relativos a* U *son* $A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *y* $B^c = \{4, 5, 7, 8, 9\}$ *cuya diferencia entre los complementos es* $B^c - A^c = \{4, 8\}$, *para lo que resulta* $B^c - A^c = A - B$.

Teorema 5.12. ***Propiedades de la diferencia entre conjuntos*** *Sean* A *y* B *subconjuntos de* U *entonces*

1. $A - A = \phi$	*2.* $A - B = A \cap B^c$	*3.* $A - \phi = A$
4. $U - A = A^c$	*5.* $A - B \subseteq A$	*6.* $A - U = \phi$
7. $A - B = \phi$ *sii* $A \subseteq B$	*8.* $A - B$ *y* $A \cap B$ *son disjuntos*	*9.* $A - B$ *y* $A^c \cap B^c$ *son disjuntos*

Demostración [Método Indirecto, Método Directo, Afirmación-razón]

1. $a \in A \wedge a \notin B \leftrightarrow a \in A \wedge a \in B^c$	... Definición del complemento
2. $a \in (A - B) \leftrightarrow a \in (A \cap B^c)$	... Definición de intersección en 1
3. $(\forall x)(x \in (A - B) \leftrightarrow x \in (A \cap B^c))$	... Generalización universal en 2
4. $A - B = A \cap B^c$	... Axioma de extensión en 3

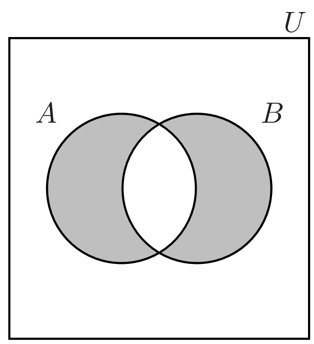
5. $A - A \neq \phi$	... Negación de la tesis
6. $(\forall x)(x \in (A - A))$	... Por ser $A - A$ no vacío en 5
7. $a \in A \wedge a \notin A$	... Definición de la diferencia en 6
8. $a \in \phi$	... Axioma del conjunto vacío en 7
$\Rightarrow\Leftarrow$	... El vacío no tiene elementos
9. $A - A = \phi$	... Método indirecto en 8
10. $A - \phi = A \cap \phi^c$	... Literal 2 de este teorema
11. $A - \phi = A \cap U$	... Propiedades del complemento 5.10 en 1
12. $A - \phi = A$	... Propiedades de la intersección en 2
$\Rightarrow$	
13. $A - B = \phi$	... Hipótesis
14. $a \in A$	... Hipótesis auxiliar
15. $a \notin B$	... Negación de la tesis
16. $a \in A \wedge a \notin B$	... Conjunción entre 14 y 15
17. $a \in (A - B)$	... Definición de la diferencia en 16
18. $a \in \phi$	... Sustitución de 13 en 17
$\Rightarrow\Leftarrow$	... Por carecer el vacío de elementos
19. $a \in B$	... Método indirecto en 15
20. $a \in A \rightarrow a \in B$	... Método directo entre 14 y 19
21. $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$	... Generalización universal en 20
22. $A \subset B$	... Definición de inclusión en 21
23. $A \subseteq B$	... Propiedades de la inclusión en 22
$\Leftarrow$	
24. $A \subseteq B$	... Hipótesis
25. $A - B \neq \phi$	... Negación de la tesis
26. $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$	... Axioma de inclusión en 24
27. $a \in A \rightarrow a \in B$	... Ejemplificación (a/x) en 26
28. $(\exists x)(x \in (A - B))$	... Por ser $A - B$ no vacío en 25
29. $a \in A \wedge a \notin B$	... Definición de diferencia en 28
30. $a \notin B$	... Simplificación en 29
31. $a \notin A$	... Modus tolendo tolens entre 27 y 30
32. $a \in A$	... Simplificación en 29
33. $a \in A \wedge a \notin A$	... Conjunción entre 31 y 32
$\Rightarrow\Leftarrow$	... Tabla de verdad de $P \wedge \sim P$
34. $A - B = \phi$	... Método indirecto en 25

Definición 5.7. ***Diferencia Simétrica*** *Sean A y B conjuntos. La diferencia simétrica entre los conjuntos A y B denotado $A\Delta B$ es el conjunto de los elementos que pertenecen a la unión pero no a la intersección. Es decir,*

$$A\Delta B := \{x : x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$$

Equivalente a $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

El siguiente esquema hace alusión a la diferencia simétrica entre conjuntos, donde se evidencia además que $A\Delta B$ se puede encontrar también como la unión entre las diferencias $A - B$ y $B - A$.



Ejemplo 5.20. *Los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 = 0\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : 3|n\}$ son subconjuntos de $U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; para lo que $A = \{2, 3\}$ y $B = \{3, 6\}$. Tanto la unión y la intersección de A y B son $A \cup B = \{2, 3, 6\}$ y $A \cap B = \{3\}$, por lo que $A\Delta B = \{2, 6\} = B\Delta A$. Puesto que $A^c = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ y $B^c = \{2, 4, 5, 7, 8\}$ y así $A^c\Delta B^c = \{2, 6\}$, de donde se presenta la igualdad $A^c\Delta B^c = A\Delta B$. De una forma similar se escribe $A^c\Delta B = \{3, 4, 5, 7, 8\}$ cuyo complemento es $(A^c\Delta B)^c = \{2, 6\} = A\Delta B$.*

Teorema 5.13. ***Propiedades de la Diferencia Simétrica*** *Sean A, B y C conjuntos y U el conjunto universal entonces*

1. $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
2. ***Conmutativa*** $A\Delta B = B\Delta A$
3. ***Asociativa*** $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$
4. $A\Delta A = \phi$
5. $A\Delta\phi = A$
6. $A\Delta U = A^c$
7. $A\Delta B = \phi$ *sii* $A = B$

Demostración [Método Directo, Método Indirecto, Prosa]

Por la definición 5.7 se tiene que $A\Delta B = A \cup B - A \cap B$, por medio de las propiedades de la diferencia entre conjuntos (teorema 5.12 literal 2) $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$, con base en la ley de morgan 5.11 resulta $A\Delta B = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$, al aplicar la propiedad distributiva 5.9 dos veces se tienen las igualdades

$$\begin{aligned} A\Delta B &= [A \cap (A^c \cup B^c)] \cup [B \cap (A^c \cup B^c)] \\ &= [(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)] \end{aligned}$$

Debido a que $B \cap B^c = \phi$ y todo conjunto unido con el vacío es el mismo conjunto entonces $A\Delta B = [\phi \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup \phi] = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$, lo cual permite concluir que $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ de acuerdo con las propiedades de la diferencia entre conjuntos.

Por aplicación de la propiedad antes demostrada $B\Delta A$ equivale a $B\Delta A = (B-A)\cup(A-B)$, al ser la unión conmutativa entonces $B\Delta A = (A - B) \cup (B - A)$ y así $B\Delta A = A\Delta B$ por lo que la conmutatividad de la diferencia simétrica se verifica.

Con base en el primer literal de este teorema se tiene que $A\Delta A = (A - A) \cup (A - A)$, puesto que $A-A = \phi$ por las propiedades de la diferencia (teorema 5.12) entonces $A-A = \phi\cup\phi = \phi$. De igual forma se tiene que $A\Delta\phi = (A - \phi) \cup (\phi - A)$ (1), como $A - \phi = A$ y $\phi - A = \phi$ al sustituir en (1) resulta $A\Delta\phi = A \cup \phi = A$.

"$\Rightarrow$" En este condicional la hipótesis es que $A\Delta B = \phi$, debe demostrarse que $A = B$, lo cual supondremos falso $A \neq B$, por lo que existe un elemento x tal que $x \in A \wedge x \notin B$, es decir, $x \in (A - B)$, como $(A - B) \subset (A - B) \cup (B - A)$ entonces $x \in (A - B) \cup (B - A)$, con base en el literal (1) de este teorema se tiene que $x \in (A\Delta B)$, por lo que $A\Delta B \neq \phi$, lo cual es una contradicción con la hipótesis y así $A = B$.

"$\Leftarrow$" En este caso la hipótesis es que $A = B$, que por sustitución $A\Delta B = A\Delta A = \phi$ que era el propósito. $\square$

La demostración de la propiedad asociativa respecto de la diferencia simétrica se presenta en el apéndice.

5.4. Cardinalidad

Para las demostraciones respecto de la cardinalidad se necesita tener presente el concepto de partición, no conjunto de partes. Se dice que dos conjuntos A y B no vacíos, particionan al conjunto universal U si éste se puede escribir como la unión de subconjuntos disjuntos determinados por A y B a través de operaciones.

Para dos conjuntos A y B se requieren cuatro subconjuntos disjuntos como son: $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ y $A^c \cap B^c$. La partición sirve para escribir cualquier conjunto en términos de éstos, así el conjunto A se puede escribir como $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, el conjunto $A^c \cup B^c$ como $A^c \cup B^c = (A - B) \cup (B - A) \cup (A^c \cap B^c)$.

Ejemplo 5.21. *En el caso en que los conjuntos A y B sean iguales se tiene que $card(A) = card(B)$; sin embargo el recíproco de esta situación no siempre se presenta, es decir, si $card(A) = card(B)$ entonces no necesariamente $A = B$, para ello se consideran los conjuntos $A = \{1, 4\}$ y $B = \{2, 3\}$ cuyo cardinal es el mismo pero no sus elementos. Este situación motiva el siguiente axioma.*

Axioma 5.7. ***Axioma de Igualdad*** *Si A y B son conjuntos tales que $A = B$ entonces $card(A) = card(B)$.*

Ejemplo 5.22. *Sean $U = \{1, 2, 3, \ldots, 13, 14, 15\}$ como conjunto referencial y los conjuntos A y B dados por los múltiplos de 3 menos el 3 y los números primos de forma respectiva, así $A = \{6, 9, 12, 15\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ con cardinales $card(A) = 4$ y $card(B) = 6$, bajo estas condiciones A y B son disjuntos ($A \cap B = \phi$) y además $A \cup B = \{6, 9, 12, 15, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ donde $card(A \cup B) = 10$, para lo que se presenta la igualdad $card(A \cup B) = card(A) + card(B) = 10$.*

Axioma 5.8. ***Axioma de Cardinalidad****. Sean A y B conjuntos disjuntos entonces $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$.*

El axioma puede generalizarse a más de dos conjuntos, es decir, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una familia de conjuntos disjuntos entre sí, esto es, $A_i \cap A_j = \phi$ para $i \neq j$ con $i, j = 1, 2, \ldots, n$ entonces

$$card(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) + \ldots + card(A_n)$$
$$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i)$$

Ejemplo 5.23. *Por conjunto referencial se hace $U = \{2, 3, \ldots, 9, 10, 11\}$ cuyo cardinal es $card(U) = 10$. Sea $A = \{n : n|18\}$ que esta conformado por $A = \{2, 3, 6, 9\}$ con $card(A) = 4$, el complemento de dicho conjunto A respecto de U es de la forma $A^c = \{4, 5, 7, 8, 10, 11\}$ para lo que $card(A^c) = 6$ donde se presenta la igualdad $card(A) + card(A^c) = card(U)$ o su equivalente $card(A^c) = card(U) - card(A)$.Sea $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\} \subset U$ cuyo cardinal es $card(B) = 6$ en este caso $A \cup B = \{2, 3, 6, 9, 4, 5, 7, 8\}$ ($card(A \cup B) = 8$), debido a que la intersección es el conjunto $A \cap B = \{6, 9\}$ ($card(A \cap B) = 2$) y por ende se presenta la igualdad $card(A \cup B) = 8 = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$.*

Teorema 5.14. ***Propiedades del Cardinal*** *Sean A y B subconjuntos de U el cual es finito entonces*

1. $card(\phi) = 0$ *2.* $card(A^c) = card(U) - card(A)$

3. $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$ *4.* $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. $\phi \cup \phi = \phi$ ... Idempotencia para la unión 5.7
2. ϕ y ϕ son disjuntos ... Axioma del conjunto vacío
3. $card(\phi \cup \phi) = card(\phi)$ ... Axioma de igualdad 5.7 en 1
4. $card(\phi) + card(\phi) = card(\phi)$ ... Axioma de cardinalidad 5.8 en 3 por 2
5. $card(\phi) = 0$ ... Propiedades de los reales en 4

6. $A \cup A^c = U$ ... Propiedades del complemento 5.10
7. A y A^c son disjuntos ... Propiedades del complemento
8. $card(A \cup A^c) = card(U)$ ... Axioma de igualdad en 6
9. $card(A) + card(A^c) = card(U)$ ... Axioma de cardinalidad en 8 por 7
10. $card(A^c) = card(U) - card(A)$ ... Propiedades algebraicas en 4

11. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ ... Propiedades de conjuntos
12. $A - B$ y $A \cap B$ son disjuntos ... Propiedades de la diferencia 5.12
13. $card((A - B) \cup (A \cap B)) = card(A)$ ... Axioma de igualdad en 11
14. $card(A - B) + card(A \cap B) = card(A)$ ... Axioma de cardinalidad en 13 por 12
15. $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$ ... Propiedades algebraicas en 14

16. $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$ ... Propiedades de conjuntos
17. $A - B$, $B - A$ y $A \cap B$ son disjuntos ... Propiedades de la diferencia
18. $card(A \cup B) = card((A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B))$ ... Axioma de igualdad en 16
19. $card(A \cup B) = card(A - B) + card(B - A) + card(A \cap B)$ ... Axioma de cardinalidad en 18
20. $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$ ... Literal 3 aplicado a $A - B$
21. $card(B - A) = card(B) - card(A \cap B)$ ... Literal 3 aplicado a $B - A$
22. $card(A \cup B) = (card(A) - card(A \cap B)) + (card(B) - card(A \cap B)) + card(A \cap B)$ ... Sustitución de 20 y 21 en 19
23. $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$ ... Operaciones en los reales en 22

Corolario 5.1. *Sean A, B y C subconjuntos de U el cual es finito, entonces*

1. *Si $A \subseteq B$ entonces* $card(B - A) = card(B) - card(A)$

2. $card(A\Delta B) = card(A) + card(B) - 2card(A \cap B)$
3. $card(A^c \cup B^c) = card(U) - card(A \cap B)$
4. $card(A \cup B^c) = card(U) + card(A \cap B) - card(B)$
5. $card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$

Demostración [Método Directo, Prosa]

Para el primer literal la hipótesis es que $A \subseteq B$, que por el teorema 5.5 $A \cap B = A$ (1); ya que $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$ entonces al sustituirse la igualdad (1) se concluye que $card(A - B) = card(A) - card(B)$.

En el teorema relativo a las propiedades de la diferencia simétrica se demostró que $A\Delta B = (A-B)\cup(B-A)$, donde los conjuntos $A-B$ y $B-A$ son disjuntos, de acuerdo con el axioma de cardinalidad se sigue que $card(A\Delta B) = card(A - B) + card(B - A)$ (2). De acuerdo con en el teorema 5.14 literal 3, las igualdades $card(A - B) = card(A) - card(A \cap B)$ y $card(B - A) = card(B) - card(A \cap B)$ son ciertas, al sustituir en la igualdad (2) resulta $card(A\Delta B) = (card(A) - card(A \cap B)) + (card(B) - card(B - A))$ y así concluir $card(A\Delta B) = card(A) + card(B) - 2card(A \cap B)$.

Por medio de la propiedad de D'Morgan 5.11 se escribe $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ que por el axioma de igualdad resulta $card(A^c \cup B^c) = card((A \cap B)^c)$ y por el literal 2 del teorema 5.14 se logra la igualdad $card(A^c \cup B^c) = card(U) - card(A \cap B)$ que era el propósito del tercer literal.

Por la propiedad distributiva y el hecho que $A \cap A^c = \phi$ se obtiene la igualdad $A \cup B^c = A \cup (A^c \cap B^c)$ (3) donde A y $A^c \cap B^c$ son conjuntos disjuntos, que por el axioma de cardinalidad aplicado en (3) se escribe $card(A \cup B^c) = card(A) + car(A^c \cap B^c)$ (4). Por la ley de D'Morgan es cierta la igualdad $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ que por las propiedades del cardinal resulta $card(A^c \cap B^c) = card((A \cup B)^c) = card(U) - card(A \cup B)$ (3). Como $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$ entonces en la igualdad (4) y por propiedades en los reales

$$\begin{aligned} card(A^c \cap B^c) &= card(U) - (card(A) + card(B) - card(A \cap B)) \\ &= card(U) - card(A) - card(B) + card(A \cap B) \ (4) \end{aligned}$$

Al sustituir la igualdad (4) en la igualdad (2) se tiene

$$\begin{aligned} card(A \cup B^c) &= card(A) + (card(U) - card(A) - card(B) + card(A \cap B)) \\ &= card(U) + card(A \cap B) - card(B) \end{aligned}$$

Y así concluir la demostración del literal 4. Para la demostración del último literal se tiene que $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C$ esto por la propiedad asociativa, así por la aplicación del literal 4 del teorema 5.14 resulta

$$\begin{aligned} card(A \cup B \cup C) &= card((A \cup B) \cup C) = card(A \cup B) + card(C) - card((A \cup B) \cap C) \\ &= card(A) + card(B) - card(A \cap B) + card(C) - card((A \cup B) \cap C) \ (5) \end{aligned}$$

Es cierta la igualdad $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, esto por la propiedad distributiva, haciendo uso de las propiedades del cardinal aplicada a la igualdad anterior y por el teorema de idempotencia se logran las siguiente igualdades

$$\begin{aligned} card((A \cup B) \cap C) &= card(A \cap C) + card(B \cap C) - card((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= card(A \cap C) + card(B \cap C) - card(A \cap B \cap C) \ (6) \end{aligned}$$

Sustituyendo la igualdad (6) en (5) resulta la igualdad

$$card(A \cup B \cup C) = card(A) + card(B) + card(C) - card(A \cap B) - card(A \cap C) - card(B \cap C) + card(A \cap B \cap C)$$

Que era el propósito de la prueba. $\square$

5.5. Situaciones Problema

Ejemplo 5.24. *Suponiendo que 70 % de la población colombiana lee la revista Poder, el 50 % la revista Cambio y un 40 % leen ambas revistas. ¿Qué porcentaje de la población lee sólo la revista poder? ¿qué porcentaje de la población colombiana lee solo un tipo de revista?*

Solución

Sean P y C el conjunto de las personas que leen la revista Poder y Cambio de forma respectiva. La información relativa a los porcentajes representa el cardinal, ya que para el caso del 70 % se escribe como 0,7 en forma decimal y así se escribe $card(P) = 0{,}7$, $card(C) = 0{,}5$, mientras que el 40 % leen ambas revistas por lo que se habla de la intersección entre los conjuntos P y C, para lo que $card(P \cap C) = 0{,}4$, puesto que el 100 % es el mayor valor a considerar entonces éste corresponde al cardinal del conjunto universal $card(U) = 1$. Bajo las circunstancias del planteamiento $P - C$ es el conjunto de personas que leen la revista Poder pero no la revista Cambio, donde por el teorema 5.14 (literal 3) resulta que $card(P - C) = card(P) - card(P \cap C) = 0{,}7 - 0{,}4 = 0{,}3$, es decir, el 30 % lee la revista Poder solamente, por igual razonamiento se halla que $card(C - P) = 0{,}1$, es decir, el 10 % lee solo la revista Cambio y así el $40\,\% = 30\,\% + 10\,\%$ lee solo un tipo de revista.

Ejemplo 5.25. *En una encuesta realizada en la universidad a 150 estudiantes acerca de sus prácticas deportivas, se encontraron los siguientes datos:*

54 estudiantes practican baloncesto
89 estudiantes practican fútbol
80 estudiantes practican natación
60 estudiantes practican fútbol y natación
10 estudiantes practican baloncesto solamente
20 estudiantes practican baloncesto y natación
15 estudiantes practican los tres deportes

Calcule:

1. *¿Cuántos estudiantes practican baloncesto y fútbol pero no natación?*
2. *¿Cuántos practican un solo deporte?*
3. *¿Cuántos practican a lo sumo dos deportes?*
4. *¿Cuántos practican como mínimo dos deportes?*

Solución

Sean B, F y N los conjuntos que representan los estudiantes que practican baloncesto, fútbol y natación de forma respectiva, el cardinal del conjunto universal es de 150, se escribe $card(U) = 150$, mientras que la intersección de los tres conjuntos es de 15, es por ello que $card(B \cap F \cap N) = 15$, como 20 estudiantes practican baloncesto y natación y ya 15 practican lo tres deportes entonces solo 5 practican baloncesto y natación pero no fútbol, se escribe como $card(B \cap F^c \cap N) = 5$. Continuando con un razonamiento similar se construye el siguiente diagrama de Venn

Con base en esta representación gráfica se puede responder a cada una de las preguntas planteadas. Para la primera el conjunto a considerar es $B \cap F \cap N^c$, cuyo cardinal es de $card(B \cap F \cap N^c) = 24$, por lo que 24 estudiantes practican baloncesto y fútbol pero no natación. Ahora bien, los que practican un solo deporte se representa en teérminos de las operaciones de conjuntos como $(B\Delta F)\Delta N$, donde $card((B\Delta F)\Delta N) = 30$, es decir, 30 estudiantes.

La expresión a lo sumo dos deporte indica aquellos estudiantes que practican dos deportes, un deporte y los que no practican ninguna actividad deportiva, para los de dos deportes se cuenta con 74, 30 de un deporte y 31 que no recurren a esto deportes es por ello que 135 estudiantes practican a lo sumo dos deportes. Mientras que la palabra como mínimo dos deportes es que practican dos o más deportes, en este caso dos o tres deportes, para la primea situación 74 y para la segunda 15, es por ello que 89 estudiantes practican como mínimo dos deportes.

Ejemplo 5.26. *En un concurso de cocineros se prepararon tres comidas A, B y C y se obtuvieron los siguientes resultados:*

20 % *de los cocineros tuvo éxito en las tres comidas*	29 % *de los cocineros fracasó en la comida A*
6 % *de los cocineros fracasó en las comidas A y B*	32 % *de los cocineros fracasó en la comida B*
5 % *de los cocineros fracasó en las comidas B y C*	36 % *de los cocineros fracasó en la comida C*
8 % *de los cocineros fracasó en las comidas A y c*	

Responda:

1. *¿Qué porcentaje de los cocineros fracasó en las tres comidas?*
2. *¿Qué porcentaje fracasó en al menos una comida?*
3. *¿Qué porcentaje fracasó en las comidas A y C pero no en la B?*
4. *¿Qué porcentaje fracasó únicamente en las comidas A y B?*

Solución

Sean A, B y C los tres tipos de comidas planteadas en la situación, donde los cardinales se plantean como situaciones de fracaso, así $card(A) = 0{,}29$, (29 %), otros cardinales son $card(B) = 0{,}32$, $card(C) = 0{,}36$, $card(A \cap B) = 0{,}06$, $card(B \cap C) = 0{,}05$ y $card(A \cap C) = 0{,}08$. La información que el 20 % obtuvo éxito en la tres comidas se modifica diciendo que 80 % fracaso en alguna, lo cual se escribe como $card(A \cup B \cup C) = 0{,}8$. Ahora procedamos a reemplazar toda la información en la igualdad dada en literal 5 del corolario 5.1 para tener $0{,}8 = 0{,}29 + 0{,}32 + 0{,}36 - 0{,}06 - 0{,}08 - 0{,}05 + card(A \cap B \cap C)$, Haciendo uso de las propiedades en los reales se sigue que $card(A \cap B \cap C) = 0{,}02$, por lo que solo el 2 % de los cocineros fracaso en las tres comidas A, B y C. Con base en el nuevo dato obtenido se hace el diagrama de Venn que sigue.

Aquellos que fracasaron en al menos una comida son los que fracasaron en 1, 2 y las tres comidas, cuyo cardinal se presenta en forma respectiva como $17\,\% + 23\,\% + 25\,\% = 65\,\%$, $4\,\% + 6\,\% + 3\,\% = 13\,\%$ y 2 %, de donde el 80 % fracaso en al menos una comida. El fracaso en la comida A y C pero no B representa la intersección $A \cap C \cap B^c$ cuyo cardinal es 6 %. El porcentaje que fracaso en las comidas A y B es el conjunto $A \cap B \cap C^c$ donde $card(A \cap B \cap C^c) = 4\,\%$.

5.6. Conjunto de Partes

Ejemplo 5.27. *Consideremos el conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$. De este conjunto A se pueden obtener subconjuntos a partir de la cantidad de elementos de A que se tomen; por ejemplo, si se toma un solo elemento, se pueden formar los tres conjuntos unitarios $A_1 = \{-1\}$,*

$A_2 = \{0\}$ *y* $A_3 = \{1\}$. *Si se toman ahora dos elementos de* A *se forman los tres conjuntos* $A_4 = \{-1, 0\}$, $A_5 = \{-1, 1\}$ *y* $A_6 = \{0, 1\}$ *y si se toman tres elementos se forma el séptimo subconjunto* $A_7 = \{-1, 0, 1\} = A$ *y el último subconjunto que se obtiene de* A *es el vacío* $A_8 = \phi$ *(ver teorema 5.6). Por lo tanto para un conjunto con tres elementos se obtienen ocho subconjuntos.*

Definición 5.8. ***Conjunto de Partes*** *El conjunto de partes de* A *o conjunto potencia de* A *es la colección de todos los subconjuntos* X *de* A*, se denota* $\mathcal{P}(A)$ *y esta dada por* $\mathcal{P}(A) := \{X : X \subseteq A\}$.

Según la definición 5.8 se escribe $X \in \mathcal{P}(A) \leftrightarrow X \subseteq A$. Para el conjunto $A = \{-1, 0, 1\}$ en el ejemplo 5.27 se sigue que el conjunto de partes está dado por

$$\mathcal{P}(A) = \{\{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}, \{0, 1\}, A, \phi\}$$

Nótese que el conjunto A hace parte del conjunto de partes así como el vacío, esto independiente del conjunto A, además la unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica entre conjuntos del conjunto de partes es otro elemento del conjunto de partes, así para $A_4 = \{-1, 0\}$ y $A_6 = \{0, 1\}$ se sigue que $A_4 \cup A_6 = \{-1, 0, 1\} = A$, $A_4 \cap A_6 = \{0\} = A_2$, $A_4 - A_6 = \{-1\} = A_1$ y $A_4 \Delta A_6 = \{-1, 1\} = A_5$. Esto se presenta en el siguiente teorema.

Teorema 5.15. ***Propiedades del Conjunto de Partes*** *Sea* A *un conjunto entonces*

1. $\phi \in \mathcal{P}(A)$
2. $A \in \mathcal{P}(A)$
3. *Sean* X, Y *elementos de* $\mathcal{P}(A)$ *entonces los conjuntos* $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X - Y$ *y* $X \Delta Y$ *son elementos e* $\mathcal{P}(A)$.

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. $\phi \subseteq A$	. . . Propiedades del conjunto vacío 5.6
2. $\phi \in \mathcal{P}(A)$	. . . Definición del conjunto de partes 5.8 en 1
3. $A \subseteq A$	. . . Propiedad reflexiva de la inclusión 5.5
4. $A \in \mathcal{P}(A)$	. . . Definición del conjunto de partes 5.8 en 3

5. $X \in \mathcal{P}(A)$	. . . Hipótesis
6. $Y \in \mathcal{P}(A)$	. . . Hipótesis
7. $X \subseteq A$	. . . Definición del conjunto de partes en 5
8. $Y \subseteq A$	. . . Definición del conjunto de partes en 6
9. $X \cup Y \subseteq A$	. . . Propiedades de la unión (literal 8 en 5.7) entre 7 y 8
10. $X \cup Y \in \mathcal{P}(A)$	. . . Definición del conjunto de partes en 9
11. $X \cap Y \subseteq A$	. . . Propiedades de la intersección (literal 8 en 5.8) entre 7 y 8
12. $X \cap Y \in \mathcal{P}(A)$	. . . Definición del conjunto de partes en 11
13. $X - Y \subseteq X$	. . . Propiedades de la diferencia (5.12)
14. $X - Y \subseteq A$	. . . Transitividad de la inclusión entre 13 y 7
15. $(X - Y) \in \mathcal{P}(A)$	. . . Definición del conjunto de partes en 14
16. $Y - X \subseteq Y$	. . . Propiedades de la diferencia (5.12)
17. $Y - X \subseteq A$	. . . Transitividad de la inclusión entre 16 y 8
18. $(Y - X) \in \mathcal{P}(A)$	. . . Definición del conjunto de partes en 17
19. $(X-Y) \cup (Y-X) \in \mathcal{P}(A)$	. . . Unión entre 15 y 18 por ser elemento de $\mathcal{P}(A)$
20. $X \Delta Y \in \mathcal{P}(A)$	. . . Propiedades de la diferencia simétrica en 19

Ejemplo 5.28. *Para los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{2, 3\}$, los conjuntos de partes son $\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, A, \phi\}$ y $\mathcal{P}(B) = \{\{2\}, \{3\}, B, \phi\}$ respectivamente, intersectando dichos conjuntos de partes resulta $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\{2\}, \phi\}$, puesto que $A \cap B = \{2\}$ entonces $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\{2\}, \phi\} = \{A \cap B, \phi\}$, y por tanto se presenta la igualdad $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Por otro lado*

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, A, B, \phi\} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \phi\}$$

Ya que la unión entre los conjuntos A y B es $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ entonces el conjunto de partes de la unión es

$$\mathcal{P}(A \cup B) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\phi\}$$

En este caso se presenta la inclusión conjuntista $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Teorema 5.16. *Sean A y B conjuntos entonces*

1. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

Demostración [Método Directo, Prosa]

Para demostrar la igualdad $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ se deben verificar las inclusiones $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ y $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$. Para la primera inclusión supongamos que $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, donde X es un subconjunto de $A \cap B$ por la definición del conjunto de partes, esto es $X \subset A \cap B$, por las propiedades de la intersección entre conjuntos se sigue que $X \subset A$ y $X \subset B$, por lo que $X \in \mathcal{P}(A)$ y $X \in \mathcal{P}(B)$, así X está en la intersección entre los conjuntos de partes, es decir, $X \in [\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)]$ y por el método directo se concluye que $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (1). Supongamos ahora que $X \in [\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)]$ de donde $X \in \mathcal{P}(A)$ y $X \in \mathcal{P}(B)$, que por la definición del conjunto de partes $X \subset A$ y $X \subset B$, por la propiedad 8 del teorema 5.8 se sigue que $X \in A \cap B$, es decir $X \subset \mathcal{P}(A \cap B)$ y así $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$ (2). Entre las inclusiones (1) y (2) se concluye la igualdad $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. $\square$

Ejemplo 5.29. *Para el conjunto $A = \{1\}$ (card(A)=1) el conjunto de partes está dado por $\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \phi\}$ cuyo cardinal es $card(\mathcal{P}(A)) = 2 = 2^1$. Si se tiene un conjunto con cardinal 2 como $B = \{1, 2\}$ entonces el conjunto de partes está conformado por $\mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{2\}, B, \phi\}$ donde $card(\mathcal{P}(B)) = 4 = 2^2$, es decir, los cardinales del conjunto de partes está en progresión geométrica, es decir, en potencias de 2 para este caso, así si A es un conjunto cuyo cardinal es n ($card(A) = n$) entonces $card(\mathcal{P}(A)) = 2^n$.*

Axioma 5.9. ***Axioma del cardinal del conjunto de Partes.*** *Sea A un subconjunto de U. Si $card(A) = n$ entonces $card(\mathcal{P}(A)) = 2^n = 2^{card(A)}$*

Teorema 5.17. ***Propiedad del cardinal del conjunto de partes*** *Sean A y B subconjuntos de U el cual es finito entonces*

1. *Si A y B son conjuntos disjuntos entonces $card(\mathcal{P}(A \cup B)) = card(\mathcal{P}(A)) \cdot card(\mathcal{P}(B))$*
2. $card(\mathcal{P}(A^c)) = \frac{card(\mathcal{P}(U))}{card(\mathcal{P}(A))}$
3. *Si $A \subseteq B$ entonces* $card(\mathcal{P}(B - A)) = \frac{card(\mathcal{P}(B)}{card(\mathcal{P}(A))}$
4. $card(\mathcal{P}(A \Delta B)) = \frac{card(\mathcal{P}(A))card(\mathcal{P}(B))}{(card(\mathcal{P}(A \cap B)))^2}$

Demostración [Método Directo, Afirmación-razón]

1. A y B son disjuntos	. . . Hipótesis
2. $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$	. . . Teorema 5.14 en 1
3. $card(\mathcal{P}(A \cup B)) = 2^{card(A \cup B)}$	. . . Axioma del cardinal del conjunto de partes
4. $card(\mathcal{P}(A \cup B)) = 2^{card(A)+card(B)}$	. . . Sustitución de 2 en 3
5. $card(\mathcal{P}(A \cup B)) = 2^{card(A)} \cdot 2^{card(B)}$	. . . Propiedades de potenciación en 4
6. $card(\mathcal{P}(A \cup B)) = card(\mathcal{P}(A)) \cdot card(\mathcal{P}(B))$	. . . Axioma 5.9 en 5

7. $card(A^c) = card(U) - card(A)$ ... Propiedades del cardinal 5.14
8. $card(\mathcal{P}(A^c)) = 2^{card(A^c)}$ ... Axioma del cardinal del conjunto de partes
9. $card(\mathcal{P}(A^c)) = 2^{card(U)-card(A)}$ ... Sustitución de 8 en 9
10. $card(\mathcal{P}(A^c)) = \frac{2^{card(A)}}{2^{card(B)}}$ ... Propiedades de potenciación en 9
11. $card(\mathcal{P}(A^c)) = \frac{card(\mathcal{P}(A))}{card(\mathcal{P}(B))}$ ... Axioma 5.9 en 10

12. $A \subseteq B$ ... Hipótesis
13. $card(B - A) = card(B) - card(A)$ ... Corolario 5.1 en 12
14. $card(\mathcal{P}(B - A)) = 2^{card(B-A)}$ ... Axioma del cardinal del conjunto de partes
15. $card(\mathcal{P}(B - A)) = 2^{card(B)-card(A)}$ ... Sustitución de 13 en 14
16. $card(\mathcal{P}(B - A)) = \frac{2^{card(B)}}{2^{card(A)}}$ ... Propiedades de potenciación en 15
17. $card(\mathcal{P}(B - A)) = \frac{card(\mathcal{P}(B))}{card(\mathcal{P}(A))}$ ... Axioma 5.9 en 16

18. $card(A\Delta B) = card(A) + card(B) - 2card(A \cap B)$ ... Corolario 5.1
19. $card(\mathcal{P}(A\Delta B)) = 2^{card(A\Delta B)}$ ... Axioma 5.9
20. $card(\mathcal{P}(A\Delta B)) = 2^{card(A)+card(B)-2card(A\cap B)}$ ... Sustitución de 18 en 19
21. $card(\mathcal{P}(A\Delta B)) = \frac{2^{card(A)}.2^{card(B)}}{2^{2card(A\cap B)}}$ ... Propiedades de potenciación en 20
22. $card(\mathcal{P}(A\Delta B)) = \frac{2^{card(A)}.2^{card(B)}}{[2^{card(A\cap B)}]^2}$ ... Propiedades de potenciación en 21
23. $card(\mathcal{P}(A\Delta B)) = \frac{card(\mathcal{P}(A))\cdot card(\mathcal{P}(A))}{[card(\mathcal{P}(A\cap B))]^2}$ ... Axioma 5.9 en 22

5.7. Familias Finitas de Conjuntos

Definición 5.9. ***Familia de Conjuntos*** *Una familia de conjuntos es un conjunto cuyos elementos, son a su vez, conjuntos.*

Ejemplo 5.30. *Sea* $\mathcal{F} = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ *entonces* $\mathcal{F}$ *es una familia de conjuntos cuyos elementos son los conjuntos* $\{0\}$, $\{1\}$ *y* $\{2\}$. *El conjunto de partes es una familia de conjuntos, por ejemplo para* $A = \{3, 4\}$ *entonces* $\mathcal{P}(A) = \{\{3\}, \{4\}, A, \phi\}$. *Una familia de intervalos cerrados se presenta como* $\mathcal{G} = \{[x - 2, x] : x \in \mathbb{R}\}$ *elementos de este conjunto son los intervalos* $[0, 2]$, $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Sea n un número natural el cual induce el conjunto $\mathcal{I}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n - 1, n\}$, así $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, es decir, los primeros cinco naturales, es por ello que $\mathcal{I}_n$ representa el conjunto de los primeros n naturales. Con base en este conjunto $\mathcal{I}_n$ las familias de conjuntos se escriben como $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} = \{A_i : i \in \mathcal{I}_n\}$ en este caso se dice que $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos indexado por $\mathcal{I}_n$.

Definición 5.10. ***Unión Generalizada*** *Sea $\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathcal{I}_n\}$ una familia finita y no vacía de conjuntos. En el caso en que $n = 1$ entonces $\bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_1$ y*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \bigcup A_n$$

Esto para $n \geq 2$.

Una forma alternativa de escribir la definición de la unión generalizada mediante los elementos se presenta como

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : (\exists i)(x \in A_i) \wedge i \in \mathcal{I}_n\}$$

Es decir, para que el elemento x pertenezca a la unión generalizada es necesario que exista un conjunto A_i de la familia $\mathcal{F}$ tal que $x \in A_i$, nótese que es necesario la existencia del conjunto (por lo menos 1) A_i que contenga a x pero no es necesaria que todos los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la familia lo contengan, sin embargo esto se puede presentar.

Ejemplo 5.31. *Considere los conjuntos $A_1 = \{-1, 0, 1\}$, $A_2 = \{0, 2, 4, 6\}$ y $A_3 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; los cuales generan la familia $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\}$. Para la unión generalizada se procede de forma inductiva $\bigcup_{i=1}^{1} A_i = A_1 = \{-1, 0, 1\}$ esto para cuando $n = 1$, si hacemos que $n = 2$ entonces se escribe*

$$\bigcup_{i=1}^{2} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{2-1} A_i\right) \bigcup A_2 = A_1 \cup A_2 = \{-1, 0, 1, 2, 4, 6\}$$

Mientras que si se hace $n = 3$ resulta

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{3-1} A_i\right) \bigcup A_3 = (A_1 \cup A_2) \cup A_3 = \{-1, 0, 1, 2, 4, 6, 3, 5\}$$

En cada uno de los casos en que se unieron los conjuntos A_1, $A_1 \cup A_2$ y $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ se obtuvieron de nuevo conjuntos es por ello que se presenta el axioma siguiente.

Axioma 5.10. ***Generalización para la Unión*** *Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos entonces la unión generalizada es un conjunto.*

Definición 5.11. ***Intersección Generalizada*** *Sea $\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathcal{I}_n\}$ una familia finita y no vacía de conjuntos. Para $n = 1$ se escribe $\bigcap_{i=1}^{1} A_i = A_1$ y*

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \bigcap A_n$$

Esto para $n \geq 2$.

Con base en los elementos, la intersección generalizada se caracteriza como

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : (\forall i)(x \in A_i) \wedge i \in \mathcal{I}_n\}$$

Es decir, x debe ser un elemento en cada uno de los conjuntos que conforman la familia A_i. Si algunos de los conjuntos A_m y A_z para $m, z \in \mathcal{I}_n$ son disjuntos entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \phi$ de forma global, ya que si $m < z$ y los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_m$ no son disjuntos entonces $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \neq \phi$. Al igual que en el caso de la unión, la intersección generalizada es un conjunto.

Ejemplo 5.32. *Para los conjuntos A_1, A_2 y A_3 del ejemplo 5.31 cuya familia está dada por $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, A_3\}$ se presentan las intersecciones generalizadas $\bigcap_{i=1}^{1} A_i = A_1 = \{-1, 0, 1\}$, $\bigcap_{i=1}^{2} A_i = A_1 \cap A_2 = \{-1, 0, 1\} \cap \{0, 2, 4, 6\} = \{0\}$ y $\bigcap_{i=1}^{3} A_i = (A_1 \cap A_2) \cap A_3 = \{0\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\} = \phi$.*

Axioma 5.11. ***Generalización para la Intersección*** *Si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos entonces la intersección generalizada es un conjunto.*

En este caso el conjunto universal U actúa de forma tal que si $\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathcal{I}_n\}$ es una familia de conjuntos en U entonces $A_i \subset U$esto para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Las propiedades relativas a familias de conjuntos son generalizaciones de las propiedades ya demostradas para las operaciones entre conjuntos, es por ello que las demostraciones de estas generalizaciones se deben hacer por medio del principio de inducción matemática.

Teorema 5.18. ***Leyes de D'Morgan Generalizadas*** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos y U el conjunto referencial entonces*

1. $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$

2. $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$

Demostración [Principio de Inducción, Afirmación-razón]

Para $n = 2$ la expresión ha demostrada se escribe como $(A_1 \cup A_2)^c = A_1^c \cap A_2^c$, expresión que es cierta con base en la ley de D'Morgan demostrada en 5.11. Se asume ahora que la propiedad es cierta para $(k-1) \in \mathbb{N}$, lo cual se escribe como

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c \qquad \text{Hipótesis Inductiva}$$

Se demuestra a continuación la veracidad para $k \in \mathbb{N}$, donde

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{k} A_i^c \qquad \text{Tesis Inductiva}$$

1. $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i)\right) \bigcup A_k\right)^c$ . . . Definición de unión generalizada 5.10
2. $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = (B \cup A_k)^c$ . . . Cambio de variable 5.10 en 1; $B = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$
3. $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = B^c \cap A_k^c$ . . . Ley de D'Morgan 5.11 en 2
4. $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)^c \cap A_k^c$ . . . Sustitución de C en 3
5. $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\right) \cap A_k^c$ . . . Hipótesis inductiva en 4
6. $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c$ . . . Intersección generalizada 5.11 en 5
7. $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$ . . . Principio de inducción en 6

Teorema 5.19. ***Distributiva Generalizada*** *Sea $\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathcal{I}_n\}$ una familia de conjuntos y Bun conjunto cualquiera entonces*

1. $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$

2. $B \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} (B \cup A_i)$

Demostración [Principio de Inducción, Afirmación-razón]

Se verifica que la propiedad se cumple para los dos primeros elementos de la familia $\mathcal{F}$, la cual se escribe como $B \cap (A_1 \cup A_2) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2)$, igualdad que es cierta por la propiedad distributiva 5.9 Supongamos que la propiedad se satisface para $(k-1) \in \mathbb{N}$, es decir,

$$B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (B \cap A_i) \qquad \text{Hipótesis Inductiva}$$

Ahora demostremos la veracidad para $k \in \mathbb{N}$, es decir,

$$B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k} (B \cap A_i) \qquad \text{Tesis Inductiva}$$

1. $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = B \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) \bigcup A_k \right)$ ...Definición de unión generalizada 5.10
2. $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = B \cap (C \cup A_k)$ ...Cambio de variable 5.10 en 1; $C = \bigcup_{i=1}^{k-1} A_i$
3. $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = (B \cap C) \cup (B \cap A_k)$ ...Propiedad distributiva 5.9 en 2
4. $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \left(B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right) \right) \bigcup (B \cap A_k)$ ...Sustitución de C en 3
5. $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} (B \cap A_i) \right) \bigcup (B \cap A_k)$ ...Hipótesis inductiva en 4
6. $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{k} (B \cap A_i)$ ...Unión generalizada en 5
7. $B \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$ ...Principio de inducción en 6

Teorema 5.20. ***Generalización propiedades del conjunto de partes*** *La familia de conjuntos $\mathcal{F} = \{A_i : i \in \mathcal{I}_n\}$ finita satisface las propiedades*

1. $\mathcal{P} \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i)$
2. $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i) \subseteq \mathcal{P} \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$

Demostración [Principio de Inducción, Afirmación-razón]

En el momento de verificar para $n = 2$ (dos primeros elementos de la familia) la propiedad enunciada se escribe como $\mathcal{P}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{P}(A_1) \cap \mathcal{P}(A_2)$, la cual se demostró su veracidad en el teorema 5.16 es por ello que la propiedad se verifica para $n = 2$. Supongamos que la propiedad se cumple para $(k-1) \in \mathbb{N}$, es decir,

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k-1} \mathcal{P}(A_i) \qquad \text{Hipótesis Inductiva}$$

Y veamos que se satisface para el siguiente natural $k \in \mathbb{N}$, lo que se escribe como

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{P}(A_i) \qquad \text{Tesis Inductiva}$$

1. $\mathcal{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathcal{P}\left(\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} A_i\right) \bigcap A_k\right)$ ... Definición de intersección generalizada 5.11
2. $\mathcal{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathcal{P}\left(B \bigcap A_k\right)$ ... Cambio de variable 5.11 en 1 $B = \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} A_i$
3. $\mathcal{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathcal{P}(B) \bigcap \mathcal{P}(A_k)$ ... Teorema 5.16 en 2
4. $\mathcal{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathcal{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} A_i\right) \bigcap \mathcal{P}(A_k)$ ... Sustitución de B en 3
5. $\mathcal{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = \left(\bigcap\limits_{i=1}^{k-1} \mathcal{P}(A_i)\right) \bigcap \mathcal{P}(A_k)$ ... Hipótesis inductiva en 4
6. $\mathcal{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{P}(A_i)$ ... Intersección generalizada en 5
7. $\mathcal{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i)$ ... Principio de inducción en 6

5.8. Intervalos en los reales

Los intervalos en los reales son conjuntos que satisfacen una condición específica, por ejemplo $(a, b]$, con a, b reales se llama intervalo semi-abierto o semi-cerrado y está conformado por todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x \leq b$, se representa en forma de conjuntos como

$$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$$

Por ejemplo en el caso en que $a = -2$ y $b = 1$ entonces $(-2, 1]$ representa todos los reales que están comprendidos entre -2 y 1 sin embargo $-2 \notin (-2, 1]$ y $1 \in (-2, 1]$, otros elementos de este conjunto son $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-5}{4}$ entre otros.

Los intervalos se categorizan en acotados y no acotados como se presentan a continuación, donde el intervalo semi-abierto expuesto con anterioridad es un intervalo acotado

1. **Intervalos acotados**

   a) $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ Intervalo abierto
   b) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ Intervalo Cerrado
   c) $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ Intervalo Semi-abierto o semi-cerrado

2. **Intervalos no-acotados**
   a) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
   b) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
   c) $(b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > b\}$
   d) $[b, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq b\}$

Ejemplo 5.33. *Consideremos los intervalos $A = (-2,3]$ y $B = [1,5)$, ambos son acotados y además la intersección la componen todos aquellos reales entre 1 y 3 incluyéndolos, es decir, $A \cap B = [1,3]$ (un intervalo cerrado), la unión entre estos mismo conjuntos es $A \cup B = (-2,5]$. La diferencia entre ambos conjuntos es $A - B = (-2,1)$, nótese que el 1 no está contenido debido a que pertenece a la intersección; como $B - A = (3,5]$ entonces la diferencia simétrica está dada por $A \Delta B = (-2,1) \cup (3,5]$. Puesto que el conjunto referencial son los reales $U = \mathbb{R}$ entonces el complemento de ambos conjuntos está dada por $A^c = (-\infty,-2] \cup (3,+\infty)$ y $B^c = (-\infty,1) \cup [5,+\infty)$.*

En la sección anterior se definición la unión generalizada para una familia de conjuntos finito, con $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ en los siguientes ejemplos se hace uso de familias infinitas, para ello no se presentan demostraciones sino que está en juego la intución y el manejo adecuado de las propiedades de los reales y su representación en la recta numérica. En dicho caso se hacen las consideraciones

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \qquad \text{y} \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$$

Es decir, donde se unen e intersectan infinitos elementos de la familia de conjuntos infinito $\mathcal{F}_\infty = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ donde el conjunto indexante ya no es $\mathcal{I}_n$ (finito) sino los naturales (infinito).

Ejemplo 5.34. *Consideremos los intervalos semi-abiertos $A_n = [n, +\infty)$ esto para $n \in \mathbb{N}$, el cual genera la familia $\mathcal{F}$. En este caso $A_1 = [1,+\infty)$, $A_2 = [2,+\infty)$, $A_3 = [3,+\infty)$, etcétera, al hacer una representación gráfica en una recta numérica se presentan las inclusiones*

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \ldots$$

Los cuales reciben el nombre de ***intervalos encajados****. Con base en la forma en que se da la inclusión se sigue que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 = [1,+\infty)$. Por otro lado la intersección entre* *todos los conjuntos* A_n *es el conjunto vacío, se escribe* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \phi$*, en efecto, si se supone por ejemplo que la intersección es el real 120,33 entonces dicho número no pertenece al intervalo* $A_{121} = [121, +\infty)$ *y así para cualquier real* x *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x \notin A_n = [n, +\infty)$*.*

El complemento de los intervalos A_1*,* A_2*,* A_3 *son* $A_1^c = (-\infty, 1)$*,* $A_2^c = (-\infty, 2)$*,* $A_3^c = (-\infty, 3)$*, en esta situación los encajamientos de los intervalos se dan en el sentido contrario*

$$A_1^c \subset A_2^c \subset A_3^c \subset A_4^c \subset \dots$$

Por lo que $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c = A_1^c$ *que es el menor conjunto que está contenido en cada uno de ellos. Por el contrario* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = \mathbb{R}$*, ya que para cualquier número real digamos 42456,1, existe un conjunto* $A_{42457} = (-\infty, 42457)$ *tal que* $42456, 1 \in A_{42457}$*. Con base en las cuatro generalizaciones halladas se presentan las igualdades*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = A_1^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \qquad y \qquad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \phi^c = \mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

Las cuales representan las generalizaciones de las leyes de D'Morgan para familias de conjuntos infinitas. (ver 5.18).

Ejemplo 5.35. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se definen los intervalos abiertos* $B_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}\right)$*, al darle valores a* n *se tienen intervalos de la forma* $B_1 = (-2, 2)$*,* $B_2 = (-1, 1)$*,* $B_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$*, las inclusiones se presentan como* $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \dots$*, nótese que a medida que* n *se hace cada vez más grande, la fracción* $\frac{2}{n}$ *se hace más pequeña, es por ello que el único término que está en la intersección de estos conjuntos es el cero, se escribe* $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \{0\}$*, mientras que la unión es el conjunto mayor, por lo que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = B_1$*. De forma general los complementos se escribe como* $B_n^c = \left(\infty, \frac{2}{n}\right] \cup \left[\frac{2}{n}, +\infty\right)$*, donde se encajan de la forma* $B_1^c \subset B_2^c \supset B_3^c \subset \dots$*, para lo que la intersección es el más pequeño de todos y se escribe* $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i^c = B_1^c$*, mientras que la unión de los complementos es cualquier real exceptuando el cero que está en la intersección de los* B_n *se escribe* $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^c = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ *nuevamente se satisface la propiedad de D'Morgan generalizada.*

Ejemplo 5.36. *Los intervalos encajados* $C_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *son de la forma* $C_1 = (-1, 2)$*,* $C_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$*,* $C_3 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$*, como* $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \dots$ *entonces la unión es el mayor de ellos por lo que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = C_1 = (-1, 2)$*; para la intersección se sigue que el cero, el uno y todos los números comprendidos entre estos hacen parte de cada* C_n*, es por esto que* $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = [0, 1]$ *incluyéndolos.*

5.9. Ejercicios

1. Hacer el siguiente pareamiento

a. Conjuntos disjuntos	__ $A^c - B^c$
b. La unión de los complementos	__ $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
c. La intersección de la unión entre conjuntos	__ $(A - B)^c$
d. El complemento de la diferencia	__ $A \cap (B \cup C)$
e. Las partes de la intersección	__ $A \cap B = \phi$
f. El complemento de la unión entre conjuntos	__ $A^c \cup B^c$
g. La diferencia entre los complementos	__ $(A \cup B)^c$
h. La unión de la intersección entre conjuntos	__ $\mathcal{P}(A \cap B)$
i. La intersección de las partes	__ $A \cup (B \cap C)$

2. Sean $A = \{\phi, \{2\}, 2, 3, \{\phi\}\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$ conjuntos. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones justificando las respuestas

a) $\{\phi\} \in A$	b) $\{2\} \subseteq B$	c) $\{\{2\}\} \subseteq A$
d) $\phi \in B$	e) $\{2\} \subseteq A$	f) $card(A) = 5$
g) $2 \in A$	h) $\{2, 3\} \subseteq A$	i) $card(\mathcal{P}(B)) = 8$
j) $\{2, 3\} \in \mathcal{P}(B)$	k) $\{2, \{2\}\} \subseteq A$	l) $\{\{2\}\} \in \mathcal{P}(A \cap B)$
m) $\phi \subseteq B$	n) $\phi \subseteq A$	ñ) $card(\mathcal{P}(A \cup B)) = 128$
o) $\{\phi\} \in \mathcal{P}(B)$	p) $\{2, \{2\}\} \in \mathcal{P}(A)$	r) $card(\mathcal{P}(A \cap B)) = 4$
s) $\phi \in [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)]$	t) $\{\phi\} \in \mathcal{P}(B)$	u) $\{\phi\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$

3. Sean $A = \{\phi, \{2\}, 3, \{\phi\}\}$ y $B = \{2, 3\}$ conjuntos. Halle $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$ y coloque los signos de $\subseteq$, $\nsubseteq$, $\in$, $\notin$, $=$ o $\neq$ según sea el caso

a) $\{\phi\}$ ___ A	b) $\{2\}$ ___ B	c) $\{\{2\}\}$ ___ A
d) ϕ ___ B	e) $\{2\}$ ___ A	f) $card(A)$ ___ 5
g) 2 ___ A	h) $\{2, 3\}$ ___ A	i) $card(\mathcal{P}(B))$ ___ 4
j) $\{2, 3\}$ ___ $\mathcal{P}(B)$	k) $\{3, \{2\}\}$ ___ A	l) $\{\{2\}\}$ ___ $\mathcal{P}(A \cap B)$
m) ϕ ___ B	n) ϕ ___ A	ñ) $card(\mathcal{P}(A \cup B))$ ___ 128

4. Sea $A = \{x/x \in \mathbb{Z} \quad \wedge \quad x^2 - 2x - 3 = 0\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad 1 < x \leq 7\}$. Halle por medio de extensión los conjuntos A y B y determine

a) $A \cap B$	b) $A - B$	c) $A \cup B$
d) $\mathcal{P}(A)$	e) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$	f) $card(A \Delta B)$

5. Represente por extensión el conjunto A cuyos elementos son aquellos números de dos cifras que se pueden construir empleando los dígitos 2, 3, 4 o 5. ¿Cuál es el cardinal del conjunto A?.

6. Represente por compresión el conjunto B cuyos elementos están constituidos por aquellos números de dos cifras tales que la unidad es mayor que las decenas. ¿Cuál es el cardinal de B? Si U es el conjunto de todos los números de dos cifras, escribir B^c por compresión.

7. Determine los elementos de los conjuntos A y B sabiendo que $A\Delta B = \{1,2,3,4,5\}$, $B^c = \{1,4,7\}$, $A^c = \{2,3,5,7\}$ y $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

8. Determine los elementos de U y de sus subconjuntos A, B y C sabiendo que $(A \cup B \cup C)^c = 1,8,12$, $B \cap C = \phi$, $A \cap C = \{5\}$, $A \cup B = \{2,3,4,5,7,9\}$, $A \cup C = \{2,3,5,6,10,11\}$ y $B^c = \{1,2,5,6,8,10,11,12\}$.

9. Elabore un diagrama de Venn para representar por medio de áreas sombreadas los siguientes conjuntos

a) $(A \cup B) - C$	b) $B^c - A$	c) $((A - B) \cap C) \cup C^c$
d) $(A - B) \cup (C - B)$	e) $(A \,\Delta\, B)\, \Delta C$	f) $(A \cup B \cup C)^c$
g) $(A \,\Delta\, B) - C$	h) $(A^c \,\Delta\, B^c) \,\Delta\, C^c$	i) $(A^c - B^c) - C^c$
j) $(A \cap C) - (B \cup A)$	k) $A^c \cup B^c \cup C^c$	l) $[(A \cap B) \,\Delta\, (B \cap C)] \,\Delta\, (A \cap C)$

10. Para $U = \{0,1,2,3,\ldots,27,28,29\}$ se consideran los subconjuntos $B = \{1,2,3,4,6,9,15\}$ y $C = \{2,3,6,15,22,29\}$. Halle los cardinales $card(B \cup C)$, $card(B \cap C)$, $card(B - C)$ y $card(B\Delta C)$ de dos formas, la primera determinando los conjuntos y la segunda con los teoremas 5.14 y 5.1.

11. Sean A y B subconjuntos de U tales que $card(U) = 200$, $card(A) = 100$, $card(B) = 80$ y $card(A \cap B) = 40$. Halle los siguientes cardinales

a) $card(A\Delta B)$	b) $card(A)$	c) $card(A^c \cap B)$
d) $card(A \cap B^c)$	e) $card(A - B)$	f) $card(A \cup B)$
g) $card(\mathcal{P}(A\Delta B))$	h) $card(\mathcal{P}(A^c))$	i) $card(\mathcal{P}(A - B))$

12. De acuerdo con el concepto del conjunto de partes halle el conjunto que se requiere en cada caso

    a) Si $A = \{-2,0,2\}$ determine $\mathcal{P}(A)$

    b) Si $A = \{1\}$ determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

    c) Si $A = \phi$ determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))$

d) Si $\mathcal{P}(A) = \{\phi, A, \{1\}, \{\phi\}, \{\{1\}\}, \{1, \{1\}\}, \{1, \phi\}, \{\{1\}, \phi\}\}$ determine el conjunto A

13. Sean A y B conjuntos arbitrarios en U, los conjuntos $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ y $A^c \cap B^c$ son disjuntos. De acuerdo con esto escriba los siguientes conjuntos como la unión de estos conjuntos disjuntos

    a*)* A
    b*)* $A \cup B$
    c*)* B^c
    d*)* $A \cup B^c$
    e*)* $(A \cap B)^c$
    f*)* $A \, \Delta \, B$

14. Para tres conjuntos A, B y C en U, es posible encontrar ocho conjuntos disjuntos cuya unión es el conjunto U. ¿Cuáles son estos ocho conjuntos? Con base en esto escriba los siguiente conjuntos como la unión de algunos de estos

    a*)* A
    b*)* $(A \cup C)^c$
    c*)* $(A \Delta B) \Delta C$
    d*)* $B^c \cap (A \cup C)$
    e*)* $A \cap (B \cup C)$
    f*)* $(A \cup B) - C$

15. Tomemos a $U = \{-10, -9, \ldots, 9, 10\}$ como el conjunto universal y los conjuntos $A = \{n \in \mathbb{N}/0 < n^2 < 26\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}/x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 14x = 0\}$, $C = \{x + 2/x = -3, -2, -1\}$ y $D = \{m \in \mathbb{Z}^+/m|10\}$ en U. Representar los cuatro conjuntos en un diagrama de Carroll y dar solución a las siguientes operaciones

    a*)* $A - (B - D)$
    b*)* $(A \, \Delta \, B) - C$
    c*)* $(A^c \cap B^c) \cap (C^c \cap D^c)$
    d*)* $(B \, \Delta \, C) \cup (A \, \Delta \, D)$

16. Considere el conjunto universal $U = \mathbb{R}$. Halle el complemento del conjunto A en cada uno de los siguientes casos

    a*)* $A = (-4, 2] \cap (1, 3]$
    b*)* $A = (-\infty, 2) \, \Delta \, \mathbb{R}^+$
    c*)* $A = \mathbb{N}^c \cap \mathbb{R}^-$
    d*)* $A = \mathbb{Z} \cup \mathbb{N}$

17. Sean $C_1 = \{1, \{1\}\}$, $C_2 = \{1, 2, \{2\}\}$, $C_3 = \{1, 2, 3, \{3\}\}$, $C_4 = \{1, 2, 3, 4, \{4\}\}$, $C_5 = \{1, 2, 3, 4, 5, \{5\}\}$ y $D = \{1, 2, 3, \{1\}, \{2\}\}$. Encontrar los conjuntos

    a*)* $\bigcup_{i=1}^{5} C_i$
    b*)* $\bigcap_{i=1}^{5} (D - C_i)$
    c*)* $\bigcap_{i=1}^{5} C_i$
    d*)* $D \cap \left(\bigcup_{i=1}^{5} C_i \right)$

18. Halle $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^c$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^c$ para cada uno de los siguientes intervalos encajados B_n (Graficar los intervalos)

a) $B_n = \left(-\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right)$
b) $B_n = \left(0, \frac{3}{n}\right]$
c) $B_n = (-\infty, -n]$
d) $B_n = \left(-\frac{2}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$

19. Indique cuales de las siguientes implicaciones son verdaderas, justificando la respuesta

    a) $A \in B \wedge B \in C \to A \in C$
    b) $A \in B \wedge B \subset C \to A \in C$
    c) $A \in B \wedge B \subset C \to A \subset C$

20. En cada uno de los siguientes numerales, exprese en términos de conjuntos y las operaciones requeridas, la región sombreada.

21. Resolver cada uno de los siguientes problemas indicando la vía de solución y representándola en un diagrama de Venn

    a) Los siguientes son los datos que muestran las preferencias de algunos aspirantes a ingresar a la universidad por ciertos programas: 50 prefieren medicina, 47 prefieren ingeniería, 35 prefieren biología, 16 prefieren ingeniería y biología, 11 prefieren medicina e ingeniería, 15 prefieren medicina y biología y 9 prefieren las tres. Determine:

    i) ¿Cuántos aspirantes fueron encuestados?
    ii) ¿Cuántos aspirantes prefieren únicamente medicina?
    iii) ¿Cuántos aspirantes no prefieren biología?
    iv) ¿Cuántos aspirantes prefieren medicina o biología pero no ingeniería?
    v) ¿Cuántos aspirantes prefieren medicina o ingeniería?

    b) A una conferencia internacional sobre contaminación del medio ambiente, asisten cien especialistas, de los cuales cincuenta hablan inglés, sesenta portugués y cincuenta español; de ellos treinta hablan portugués e inglés; veinte inglés y español; veinte portugués y español. ¿Cuántos asistentes hablan los tres idiomas?

    c) Una encuesta realizada a un grupo de profesores donde todos respondieron, reveló que 450 tienen casa propia; 260 tienen automóvil; 360 tienen computador; 200 tienen casa y automóvil; 250 tienen casa y computador; 150 tienen automóvil y computador y 100 tienen casa, automóvil y computador. Calcule:

    i) ¿Cuántos fueron los profesores encuestados?
    ii) ¿Cuántas personas tienen solamente casa propia?
    iii) ¿Cuántas personas tienen solamente automóvil?
    iv) ¿Cuántas personas tienen casa y automóvil, pero no tienen computador?
    v) ¿Cuántas personas tienen casa y computador pero no automóvil?

d) Una ensambladora de autos recibió una orden de fabricación de 38 automóviles tipo sedán, con las siguientes características: 18 con aire acondicionado; 23 con vidrios eléctricos y 29 con cojinería de lujo. De estos, 3 deben tener solamente vidrios eléctricos, 8 deben tener solamente cojinería de lujo; 9 de los vehículos deben tener solamente vidrios eléctricos y cojinería de lujo, 5 de los vehículos deben tener los tres aditamentos. Determine:

i) ¿Cuántos vehículos llevan aire acondicionado y cojinería de lujo, solamente?

ii) ¿Cuántos vehículos llevan como máximo dos de las características?

iii) ¿Cuántos vehículos llevan aire acondicionado solamente?

22. Buscar conjuntos A, B y C para mostrar, por medio de un contraejemplo, que las siguientes proposiciones no son teoremas

a) Si $A \subseteq B$ y $C \subseteq B$ entonces $A \subseteq C$
b) Si $A \subseteq B \cup C$ entonces $A \subseteq B$
c) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
d) $card(A - B) = card(A) - card(B)$
e) $card(A \cap B \cap C) = card(A) + card(B) + card(C)$
f) $A - (B - C) = (A - B) - C$
g) $\mathcal{P}(A - B) \subseteq (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B))$
h) $(A - B) \cup A = A \cup B$
i) Si $(A \cap B) \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$ o $B \subseteq C$
j) $A \subseteq B$ si y sólo si $A^c \cap B = \phi$
k) Si $(A - B) \subseteq C$ entonces $A \subseteq C$
l) $\mathcal{P}(A \,\Delta\, B) = \mathcal{P}(A) \,\Delta\, \mathcal{P}(B)$
m) Si $A \cap B = A \cap C$ entonces $B = C$
n) Si $A - B = \phi$ entonces $A = B$
o) Si $A \cap B = \phi$ entonces $A = \phi \vee B = \phi$
p) Si $B \cup C \subseteq A \cup C$ entonces $B \subseteq A$

23. Haciendo uso del sistema formal deducir cada una de los siguientes teoremas

1) $A - B$ y $A \cap B$ son disjuntos
2) $\phi \neq \{\phi\}$
3) $(A - B) \cap (B - A) = \phi$
4) $(A - B) \subseteq A$
5) Si $A \subseteq B \cap C$ entonces $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$
6) Si $A \neq \phi$ entonces $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
7) $A - B = A - (A \cap B)$
8) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
9) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
10) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
11) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A - C^c)$
12) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
13) Si $A \subseteq B$ entonces $B - (B - A) = A$
14) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

15) $(A - C) - (B - C) = (A - B) - C$
16) Si $A \subseteq B$ entonces $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
17) $A \cap (A \cup B) = A$ (Absorción)
18) $A \cap B = A - (A - B)$
19) $A \cup (A \cap B) = A$ (Absorción)
20) $(A \cap C) - (B \cap C) = (A - B) \cap C$
21) Si $A \subseteq \phi$ entonces $A = \phi$
22) $(A \Delta B)^c = A \Delta B^c$
23) $A - B = \phi$ si y sólo si $A \subseteq B$
24) $A \Delta B = A^c \Delta B^c$
25) $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$
26) $A - B = B^c - A^c$
27) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$
28) $\mathcal{P}(A - B) \subseteq (\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)) \cup \{\phi\}$
29) $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$
30) Si $A \subseteq B$ entonces $C - B \subseteq C - A$
31) Si $B \subset A$ entonces $A \cup B = A$
32) $B - A = (A \cup B) - A$
33) $A \cup B = \phi$ sii $A = \phi$ y $B = \phi$
34) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$
35) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cap C \subseteq B \cap C$
36) $card(A^c - B^c) = card(B) - card(A \cap B)$
37) Si $A \subseteq B \subseteq C$ entonces $A \cup B = B \cap C$
38) $A - (B \Delta C) = [A - (B - C)] \cap [A - (C - B)]$
39) Si $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ y $C \subseteq A$ entonces $A = B = C$
40) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = [(A \cup C) \cap (B \cup C)] \cap [(A \cup D) \cap (B \cup D)]$
41) Si $A \cup B \subseteq A \cup C$ y $A \cap B \subseteq A \cap C$ entonces $B \subseteq C$
42) Sean A, B y C conjuntos para los cuales $B \subseteq A$. Demuestre que $B \subseteq C$ si y sólo si $A - C \subseteq A - B$.
43) $A \subset B$ sii $(B \cap C) \cup A = B \cap (C \cup A)$. Donde A, B y C son conjuntos cualesquiera.

24. Por medio del principio de inducción matemática demostrar las siguientes generalizaciones respecto a las operaciones entre conjuntos y al conjunto de partes

1) $B \cap \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (B \cap A_i)$
2) $B \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cup A_i)$
3) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$ (Ley de D'Morgan)
4) $B \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (B \cup A_i)$ (Distributiva)
5) $B - \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcap_{i=1}^{n} (B - A_i)$
6) $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{P}(A_i) \subseteq \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)$
7) $B - \left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (B - A_i)$

25. Sean $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ una colección de conjuntos crecientes, es decir, $A_i \subseteq A_{i+1}$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Considere los conjuntos $C_1 = A_1$, $C_2 = A_2 - A_1$, ..., $C_n = A_n - A_{n-1}$. Demuestre

a) $\bigcup_{i=1}^{n} C_i = A_n$

b) $C_i \cap C_j = \phi$ para todo $i \neq j$ con $i, j = 1, 2 \ldots, n$, es decir, los conjuntos C_i son disjuntos dos a dos

Bibliografía

[1] Acevedo Velez, Diana Patricia: *Módulo Lógica y Teoría de Conjuntos*. Facultad de Educación, Dirección de Regionalización, Universidad de Antioquia, Medellín, (2007)

[2] Apostol, Tom: *Calculus*. Volumen I, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Segunda edición, editorial revertè, Barcelona, (2001)

[3] Bartle, Robert and Sherbert, Donald : *Introducción al Análisis Matemático de una Variable*. Limusa. México, (1984)

[4] Bloch, Ethand D. *Proof and Fundamentals: A first course in abstract mathematics*. Birkhauser, Estados Unidos (2000)

[5] Bourbaki, Nicolas. *Théorie des Ensembles*. Éléments de Mathématique. Hermann ()

[6] Buritica Trujillo, Benjamin. *Matemáticas Discretas*. Universidad de Antioquia, Medellín (2005)

[7] Carroll, Lewis. El juego de la lógica y otros escritos. Alianza editorial, España, (1984)

[8] Diez M, Luis H. : *Matemáticas Operativas*. Primer año de universidad, preuniversitarios y semilleros. Decimosexta edición, (2009)

[9] Guarín Vásquez, Hugo : *Introducción al Simbolismo Lógico*. Universidad de Antioquia, Medellín.

[10] Guarín Vásquez, Hugo: *Introduccióna a los Sistemas Numéricos*. Universidad de Antioquia, Medellín.

[11] Jaramillo, Alberto; Mejía, Clara y Mesa, Orlando: *Modelos de razonamiento lógico-matemático implementados en situaciones problema, en algunos temas específicos de la matemática*. Universidad de Antioquia, Medellín (2001)

[12] Pérez González, Javier: *Cálculo Diferencial e Integral*. Departamento de Análisis matemático. Universidad de Granada (2006)

[13] Pérez Sedeño, Eulalia: *Ejercicios de Lógica*. Manuales Lógica. Siglo ventiuno de España Editores, Madrid (1991)

[14] Restrepo Sierra, Guillermo. *Los fundamentos de la matemática*. Editorial Universidad del Valle, Cali (1998)

[15] Sacerdoti, Juan: *Relaciones y Funciones*. Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ingeniería, (2002)

[16] Santos, José Carlos : *Método de Inducão*.

[17] Sominski, I. S.: *Método de la inducción matemática*. Editorial Mir, Moscú, (1985)

[18] Suppes, Patrick and Hill, Shirley: *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Revertè, Espeña, (1980)

[19] Suppes, Patrick: *Teoría Axiomática de Conjuntos*. Editorial Norma, Cali, Colombia, (1968)

[20] Zakon, Elias: *Basic Concepts of Mathematics*. Universidad de Windsor, The Trillia Group, (2001)

[21] Zubieta Russi, Gonzalo: *Lógica Deductiva*. Sociedad Metemática Mexicana, Publicaciones Electrónicas, Volumen 1, (2002)

Capítulo 6

Sistemas Numéricos

Los **sistemas numéricos** son conjuntos de números sobre los cuales se definen las operaciones de adición, multiplicación, diferencia o división, como las operaciones básicas, sin embargo se definen otras operaciones las cuales se derivan de éstas, como es el caso de la potenciación, la logaritmación, la radicación, el valor absoluto, la divisibilidad, etc. Dichas operaciones cumplen unas ciertas propiedades, las cuales le confieren a los sistemas numéricos **estructuras algebraicas**, entre las estructuras de mayor importancia son las de semigrupo, monoide, grupo, anillo, campo, espacio vectorial, etc. El orden en la presentación de los sistemas numéricos tiene un significado histórico en el cual están involucradas diferentes culturas y para lo que se respondieron unas determinadas preguntas que dependieron de un contexto.

Para las operaciones de adición y multiplicación es necesario analizar ciertas propiedades que cumplen dichos números en el sistema numérico éstas se presentan a continuación las cuales están escritas en términos de la lógica cuantificacional estudiada en el capítulo 3.

Clausurativa: También llamada cerradura, donde la adición o multiplicación de los elementos de un sistema numérico es otro elemento de dicho sistema numérico.

Conmutativa: En esta propiedad no importa el orden en que se realicen las operaciones, es decir, $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$, esto para la adición y $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$ para la multiplicación.

Asociativa: Esta propiedad establece que se puede agrupar los términos de la operación en cualquier orden pero utilizando dos elementos para garantizar que las operaciones sean binarias, se escribe

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z)) \quad \text{y} \quad (\forall x)(\forall y)(\forall y)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

Para la aplicación de esta propiedad se requiere como mínimo tres elementos.

Modulativa: Para todos los elementos de un sistema numérico deben existir un par de números que satisfagan $(\exists x)(\forall y)(x + y = y + x = y)$ y $(\exists x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x = y)$ los cuales se llaman módulo de la adición y módulo de la multiplicación respectivamente. Es bien conocido que dichos módulos deben ser el cero (0) y el uno (1) respectivamente; de acuerdo con esto se escriben las propiedades modulativas como $(\forall y)(0 + y = y + 0 = y)$ y $(\forall y)(1 \cdot y = y \cdot 1 = y)$.

Invertiva: Posterior a la existencia de los módulos se buscan los elementos inversos, siempre que existan, los cuales deben satisfacer $(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)$ y $(\forall x \neq 0)(\exists y)(x \cdot y = 1)$, dichos números se llaman inversos aditivos y multiplicativos de forma respectiva, que se escriben en ese orden como $-x$ y $\frac{1}{x}$. El inverso multiplicativo también se denota como x^{-1} y las propiedades invertivas se escriben como $(\forall x)(x + (-x) = 0)$ y $(\forall x \neq 0)\left(x \cdot \frac{1}{x} = 1\right)$. Nótese que para el inverso multiplicativo, el número no puede ser el cero ya que se tendría una división por cero. Es decir, el 0 es el único número que no tiene inverso multiplicativo.

Distributiva: Respecto de las dos operaciones, adición y multiplicación, se presenta la propiedad distributiva $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$ la cual implica en el lado izquierdo que la primer operación a efectuar es la adición y luego la multiplicación, mientras que en el lado derecho primero se hacen las dos multiplicaciones y luego la adición; es decir, dicha propiedad intercambia la jerarquía (orden) en las operaciones.

En cuanto a las estructuras algebraicas, el **semigrupo** es aquel conjunto donde la operación definida cumpla la propiedad clausurativa y asociativa, para el **monoide** deben cumplirse las propiedades clausurativa, asociativa y modulativa, un monoide es abeliano si la operación es conmutativa. En la siguiente tabla se resumen las condiciones para las estructuras que dependen de una sola operación (puede ser la adición o la multiplicación)

Estructura	Clausurativa	Asociativa	Conmutativa	Modulativa	Invertiva
Semigrupo	✓	✓			
Semigrupo abeliano	✓	✓	✓		
Monoide	✓	✓		✓	
Monoide abeliano	✓	✓	✓	✓	
Grupo	✓	✓		✓	✓
Grupo abeliano	✓	✓	✓	✓	✓

Para el caso de dos operaciones (en estas notas se considera la adición y multiplicación) las estructuras se dividen en **anillo**, **anillo con unitario**, **anillo conmutativo** y **campo** como sigue.

Estructura	Operación	Clausu.	Asocia	Conmuta	Modulo	Inverso	Distribuye
Anillo	$+$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	$\times$	✓	✓				
Anillo con unitario	$+$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	$\times$	✓	✓		✓		
Anillo conmutativo	$+$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	$\times$	✓	✓	✓			
Campo	$+$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	$\times$	✓	✓	✓	✓	✓	

En las cuatro estructuras que se definieron previamente se requiere la adición tenga la estructura de grupo abeliano y las propiedad distributiva se debe satisfacer, para la multiplicación varía entre semigrupo y monoide; mientras que la estructura de campo requiere que las dos operaciones sean grupos abelianos.

6.1. Números Naturales

El conjunto de números naturales es el más común de los conjuntos ya que nos permite contar los objetos que están a nuestro alrededor, se denota con la letra $\mathbb{N}$ y está conformado por

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, n+1, \ldots\}$$

Para simbolizar a un número natural se utiliza la letra n. Además, por convención, el 1 es el primero número natural, en otros texto puede ser que el 0 sea el primer natural; en cualquiera de los casos, los números naturales tienen un primer elemento y no tienen último (infinitos).

A cualquier número natural n se le asocia otro número natural llamado el **siguiente** el cual es $n+1$ y se escribe $\sigma(n) = n+1$ (donde σ es una función llamada siguiente) así al número 10 le corresponde el siguiente 11 y se escribe $\sigma(10) = 11$. Para el mismo natural n está asociado otro número natural llamado el **antecesor**, esto en el caso de que exista, ya que el 1 no tiene antecesor, en otros casos el antecesor es $n-1$.

Con los elementos de este sistema numérico están asociadas las operaciones de adición y multiplicación de forma usual, para los cuales se cumplen las propiedades clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa para la multiplicación y distributiva; de ahora en adelante llamaremos **Axioma de los números naturales (N.A.$\mathbb{N}$)** a estas propiedades que cumplen los naturales. Axioma en el sentido que se requieren otra serie de elementos teóricos para demostrar su veracidad, llamados los axiomas de Peano. Los naturales bajo la adición tienen la estructura de un semigrupo abeliano, bajo la multiplicación es un monoide abeliano.

La propiedad modulativa de la adición no la cumple, ya que 0 no es un natural, la propiedad invertiva no la cumple para ninguna de las dos operaciones ya que para el 5 que es un natural, -5 y $\frac{1}{5}$ no son naturales. Para solventar algunas de estas dificultades se construye un conjunto que contenga a los naturales.

Una operación compuesta que se define en este sistema numérico es el **factorial** y corresponde a la multiplicación sucesiva de los números naturales hasta el natural dado, es decir, para $n \in \mathbb{N}$ el factorial se denota como $n!$ y corresponde a

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

Por ejemplo para 5 su factorial está dado por $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, mientras que para el 1 se sigue que $1! = 1$. El factorial de un número natural se escribe en términos del factorial del antecesor, siempre que sea diferente de 1, veamos

$$5! = \underbrace{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times 5 = 4! \times 5$$

En general se escribe $n! = n \times (n-1)!$.

6.2. Números Enteros

Como los números naturales adolecen de los inversos aditivos, se crean los números negativos y con ellos el conjunto de los números enteros, que se denota como

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

La letra $\mathbb{Z}$ es la inicial de la palabra “Zahlen” que en alemán significa “Número”. Los números enteros se escribe en forma general como $\mathbb{Z} = \{\pm n : n \in \mathbb{N}\}$, conjunto que ya no tiene primer elemento y para cada uno está definido el siguiente y el antecesor. Además que el módulo de la adición aparece en dicho conjunto y los inversos aditivos.

Sobre los enteros se diferencian tres subconjuntos disjuntos (sin elementos comunes) que son $\mathbb{Z}^+$ llamados **enteros positivos**, $\mathbb{Z}^-$ que son los **enteros negativos** y el cero $\{0\}$, en términos de conjuntos se escribe $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$, el conjunto de los enteros positivos corresponde a los naturales y así $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$. La palabra **entero no-negativo** hace alusión a que el número es positivo o es el cero, igual situación sucede con **entero no-positivo**.

De acuerdo con las propiedades de las operaciones, este sistema posee las siguientes propiedades: Clausurativa, conmutativa, asociativa, modulativa, invertiva para la adición, distributiva;

esto lo llamaremos el **Axioma de los números enteros (N.A.$\mathbb{Z}$.)**. En este caso no cumple la propiedad invertiva para la multiplicación, ya que están faltando los fraccionarios, es decir, los enteros poseen la estructura de anillo conmutativo con unitario. Una consecuencia de este axioma es que sobre el sistema de los números enteros se define la **ley de signos**, donde para m, n enteros se tiene que $-(-m) = m$ y $-(m+n) = (-m) + (-n)$.

El conjunto de los números enteros se puede dividir en dos conjuntos disjuntos como son los **enteros pares** y los **enteros impares**, denotados de forma respectiva como $\mathbb{Z}_P$ y $\mathbb{Z}_I$ y definidos como $\mathbb{Z}_P = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ y $\mathbb{Z}_I = \{2n+1 : n \in \mathbb{Z}\}$, los cuales se pueden expandir (enlistar sus elementos) como $\mathbb{Z}_P = \{\ldots - 4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ y $\mathbb{Z}_I = \{\ldots - 3, -1, 1, 3, \ldots\}$.

¿Será que los pares son cerrados bajo la adición y multiplicación? ¿Y los impares? Consideremos los enteros pares 8 y 12, donde $8 + 12 = 20$ y $8 \times 12 = 96$ ambos resultantes son pares. Enteros impares son 7 y 31, la adición produce 38 que es par y la multiplicación 217 que es impar. En forma general se demostrará que los pares son cerrados bajo ambas operaciones y los impares no lo son para la adición pero si para la multiplicación.

Para el caso de los enteros positivos se define el factorial como en el caso de los naturales y por definición se tiene en cuenta que $0! = 1$, sin embargo, el factorial no existe para los enteros negativos. Además se define el **valor absoluto** de un número entero n como la distancia de éste al origen (al cero), lo cual se escribe como $|n|$ y debe ser un número no negativo por ser una distancia. Para el caso del 3 el valor absoluto está dado por $|3| = 3$ y para el -5 resulta $|-5| = 5 = -(-5)$. En términos generales el valor absoluto se escribe como

$$|n| = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ -n & n < 0 \end{cases}$$

Otra de las operaciones que se puede definir sobre el conjunto de números enteros es la **divisibilidad**, donde un entero "m divide a un entero n" si y sólo si "existe un entero k tal que $n = km$". Por ejemplo 6 divide a 216 ya que $216 = 36 \times 6$ donde $36 \in \mathbb{Z}$. La definición de divisibilidad equivale a decir que "n es **divisible** por m", "n es un **múltiplo** de m" o "m es un **divisor** de n". La divisibilidad se denota como $m|n$; en términos de la lógica cuantificacional se escribe como

$$m|n \iff (\exists k \in \mathbb{Z})(n = km)$$

En caso de que "m no divida a n" se escribe $m \nmid n$, el hecho que $m \nmid n$ no quiere decir que $n|m$, por ejemplo, 3 no divide a 4 por que no existe un entero k tal que $4 = 3 \cdot k$, de igual forma 4 no divide a 3, ya que la solución de $3 = 4 \cdot k$ no es entera. Un caso particular en la divisibilidad ocurre con el cero, así $0 \nmid n$, es decir, el cero no divide a ningún entero ya que no existe un entero tal que $n = 0 \cdot k$, mientras que $n|0$ independiente de n ya que $0 = n \cdot 0$.

Una operación que se desprende de la divisibilidad es la **congruencia**, donde "m es congruente con n módulo r" si $r|(m-n)$, dicha propiedad se denota $m \cong n \mod (r)$ que en términos de la lógica cuantificacional y de la definición de divisibilidad resulta

$$m \cong n \mod (r) \Longleftrightarrow r|(m-n) \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(m-n=kr)$$

Por ejemplo, los números 23 y 8 son congruentes bajo el módulo 5, ya que $23-8=15=5\times 3$, una forma de determinar congruencia es a través de los residuos, 23 al dividir por 5 deja residuo 3, al igual que 8, de allí la congruencia entre los mismos, se escribe $23 \cong 8 \mod 5$.

Consideremos ahora los números 36 y 45, los divisores de ambos números constituyen un conjunto dado por $D_{36}=\{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ y $D_{45}=\{1,3,5,9,15,45\}$, los divisores comunes de ambos números son $D_{36}\cap D_{45}=\{1,3,9\}$, el cual tiene un máximo que corresponde al 9 y escribimos $m.c.d(36,45)=9$ para indicar que el **máximo común divisor** entre los números 36 y 45 es 9, donde el 9 divide a ambos números y se escribe $9|36$ y $9|45$. De acuerdo con el ejemplo se sigue que para m,n el máximo común divisor es un número $s=m.c.d.(m,n)$ tal que $s|m$, $s|n$, pero es el mayor de los divisores. No siempre los divisores son finitos, en el caso del cero los divisores son todos los números enteros, $D_0=\mathbb{Z}$.

Para los mismos números del ejemplo anterior, sus múltiplos constituyen un conjunto infinito dado por $M_{36}=\{36,72,108,144,180,216,\ldots\}$ y $M_{45}=\{45,90,135,180,225,270,\ldots\}$, algunos múltiplos comunes son $M_{36}\cap M_{45}=\{180,360,540,\ldots\}$ este conjunto no tiene un máximo, por lo que se pregunta por el mínimo de los múltiplos comunes en cuyo caso es el 180 se escribe $m.c.m(36,45)=180$ para indicar el **mínimo común múltiplo**, en este caso $36|180$ y $45|180$. En general, si $t=m.c.m(m,n)$ entonces $m|t$ y $n|t$ con t el menor divisor.

Otro conjunto que se puede diferenciar en los enteros es el de los **números primos** se denotará como $\mathcal{P}$ y se define como el conjunto de aquellos números enteros positivos que tienen exactamente dos divisores positivos el 1 y el mismo números, es decir, p es primo sii $D_p=\{1,p\}$. La propiedad de ser número primo se llamará **primalidad**. En el siguiente conjunto se enmarcan algunos de los números que son primos

$$\mathcal{P}=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,\ldots\}$$

Nótese que bajo las operaciones de adición y multiplicación, el conjunto de números primos no es cerrado, en efecto, para 11 y 13, $11+13=24\notin\mathcal{P}$ y $11\cdot 13=143\notin\mathcal{P}$. El procedimiento para encontrar los números primos empezando por descartar los pares, luego los múltiplos de 3, y así sucesivamente, se conoce como la Criba de Eratóstenes. Este conjunto de primos tiene unas ciertas particularidades que le hacen especial y que han sido el objeto de múltiples estudios a lo largo de la historia:

1. No hay una fórmula recursiva para describir todos los elementos del conjunto de primos, por ejemplo la expresión $M_n=2^n-1$ genera algunos de los primos como son $M=\{3,7,31,127,8191,\ldots\}$ que se conocen como **primos de Mersenne**.

2. El número 2 es el único que es par. El resto son impares, ya que cualquier otro par tiene al 2 como divisor.

3. El conjunto de primos es infinito.

4. Aquellos números que no son primos se les llama **compuestos**, en el sentido que los números compuestos exceptuando el 1, se pueden escribir como la multiplicación de números primos. Por ejemplo, el números 144 es compuesto y se puede escribir como $7056 = 2^4 \times 3^2 \times 7^2$ donde $2, 3, 7$ son números primos. El procedimiento para escribir un número compuesto en términos de números primos se llama **descomposición en factores primos**.

El estudio de las operaciones (divisibilidad, primalidad, congruencias, máximo común divisor, mínimo común múltiplo, etc.) y propiedades que cumplen los números enteros se conoce en matemáticas como **teoría de números**.

6.3. Números Racionales

En el sistema de los números enteros se presenta la dificultad de no existir los inversos multiplicativos, de acuerdo con esto se construye el conjunto de los números **fraccionarios**, el cual se denotará $\mathbb{F}$ y está representado como el conjunto de todos los números de la forma $\frac{m}{n}$ donde $n \neq 0$ y tanto m como n sean enteros; elementos en este conjunto son $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, 3, \ldots$. En dicho conjunto se obtiene el conjunto de números **racionales** el cual se define y denota como

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \text{ y } m.c.d.(m, n) = 1 \right\}$$

Es decir, una fracción $\frac{m}{n}$ será un número racional si de los divisores comunes entre m y n, el máximo es 1. Las siguientes expresiones son equivalentes $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots$, de estas fracciones el único que es racional es el $\frac{1}{2}$, ya que para $\frac{2}{4}$ el máximo común divisor es 2 y por tanto no cumple la definición. De acuerdo con esto, un número fraccionario es racional si está simplificado al máximo y a éste lo llamaremos el **menor representante**.

Las operaciones de adición y multiplicación se definen sobre el sistema de los racionales teniendo en cuenta que si $p = \frac{m}{n}$ y $q = \frac{m_1}{n_1}$ entonces

$$p + q = \frac{m}{n} + \frac{m_1}{n_1} = \frac{mn_1 + nm_1}{nn_1} \quad \text{y} \quad p \times q = \frac{m}{n} \times \frac{m_1}{n_1} = \frac{mm_1}{nn_1}$$

Donde m, n, m_1, n_1 son números enteros, $n \neq 0$ y $n_1 \neq 0$. Para que el resultado de la adición y multiplicación sea un nuevamente un número racional se debe simplificar hasta la mínima expresión, como es el caso de la suma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{8}$ donde $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ son ambos racionales, pero $\frac{6}{8}$ no lo es, para ello se simplifica y se tiene $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ el cual ya es un racional, igual situación se puede presentar con respecto a la multiplicación de racionales. Esto garantiza la cerradura respecto de la adición y la multiplicación.

Nótese que tanto el cero (0) como el uno (1) son ambos racionales, por lo que las propiedades modulativas están bien definidas sobre los racionales; así como las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva. En el caso del racional $p = \frac{m}{n}$ con $n \neq 0$ el elemento inverso multiplicativo está dado por $\frac{1}{p} = \frac{n}{m}$ siempre que $m \neq 0$, que es de nuevo un número racional, así las propiedades invertivas también son satisfechas. Ya que el sistema de los números racionales cumple cada una de las propiedades de la adición y multiplicación y la propiedad distributiva entonces los racionales tienen la estructura de campo.

Sean p y q números racionales, para $q = \frac{m_1}{n_1}$ con $n_1 \neq 0$ el inverso se presenta como $\frac{1}{q} = \frac{n_1}{m_1}$ con $m_1 \neq 0$, esto permite definir la división entre números racionales como $\frac{p}{q} = p \times \frac{1}{q} = \frac{m}{n} \times \frac{n_1}{m_1} = \frac{mn_1}{nm_1}$. Dicho resultado induce la **ley de extremos**.

Si para el racional $p = \frac{m}{n}$ se aplica sucesivamente el **algoritmo de la división** se tiene que todo racional se representa como un **número decimal** que puede ser finito o infinito periódico, para el primero el residuo es cero y para el segundo el residuo es un número distinto de cero que se repite infinitas veces; es así como el racional $\frac{1}{2}$ se representa como $0,5$ el cual es finito, mientras que $\frac{1}{6}$ se representa como $0{,}1666\ldots$ el cual es infinito y el periodo es el 6, se escribe como $\frac{1}{6} = 0{,}166\ldots = 0{,}1\widehat{6}$. El proceso de pasar de un racional a un decimal periódico es reversible, por lo que si se tiene un número decimal periódico se puede encontrar un número racional que le generó. Con base en esto es necesario crear un conjunto distinto de los racionales que contenga aquellos decimales que son infinitos y no presentan un periodo.

6.4. Números Irracionales

Históricamente los números irracionales aparecen en los griegos al tratar de medir la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos midan 1 (unidad), al no obtener un valor racional que describía la medida de dicha hipotenusa, que es conocida como $\sqrt{2}$, se crea el conjunto de números irracionales, por definición serán aquellos números que no son racionales, es decir, los que no se pueden escribir como el cociente de dos enteros. Algunos de los números irracionales son $\sqrt{2}, \sqrt[4]{3}, \pi, e, \sqrt{\pi}, \sqrt[3]{e}, \ldots$, conjunto que es infinito y se denotarán como $\mathbb{Q}^*$. Cada uno de los números enlistados anteriormente se pueden escribir como decimales no periódicos y por tanto deben ser infinitos, por ejemplo

$$\pi = 3{,}141592\ldots, \quad e = 2{,}718281828459\ldots, \quad \sqrt{7} = 2{,}64575131\ldots$$

Los números irracionales no tiene una forma específica para describir sus elementos, es decir, no tiene una forma recursiva, así como los primos, que indiquen como se deben escribir los mismos. No todas las raíces son irracionales, ya que al ser el radicando un cuadrado perfecto resulta un número racional, como sucede con $\sqrt{144} = 12 \in \mathbb{Q}$.

El cero no es un número irracional, ya que es racional, es por ello que el conjunto $\mathbb{Q}^*$ no cumplen las propiedades de cerradura, es decir, no necesariamente la adición y multiplicación de dos irracionales es otro irracional; como $\sqrt{2}$ es irracional así como $-\sqrt{2}$ entonces $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ y $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ donde 0 y 2 no son irracionales. Este sistema numérico es el único que no cumple ninguna de las estructuras algebraicas enunciadas anteriormente precisamente por la propiedad de cerradura.

6.5. Números Reales

Los números reales son la unión de los números racionales y los números irracionales se denotan como $\mathbb{R}$ y se escribe como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$. Debido a que los números irracionales no tienen una forma recursiva para escribirse entonces los números reales tampoco la tienen. Al igual que los números racionales, los reales cumplen la estructura de campo, es decir, tanto la adición como la multiplicación conmutan, asocian, poseen elemento neutro e inverso, además de que se satisface la propiedad distributiva.

Los reales se pueden dividir en tres conjuntos que no tienen elementos comunes, los cuales son los reales positivos, los reales negativos y el cero, los dos primeros se representan como $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$. El primer conjunto cumple las propiedades de cerradura, es decir, tanto la adición como la multiplicación de dos reales positivos es otro real positivo, caso que no ocurre con los reales negativos, ya que cumple la clausurativa de la adición, más no de la multiplicación, debido a que $(-2) \times (-5) = 10 \in \mathbb{R}^+$. Este resultado importante se establece como axioma.

Axioma 6.1. ***Axioma de Orden***: *Si x y z son reales positivos entonces $x + z$ y $x \cdot z$ son reales positivos también.*

Adicional a las operaciones de adición y multiplicación se define sobre el conjunto de los reales la **relación de orden** "menor que" denotada $<$, donde para x, y se escribe $x < y$ indicando que "x es menor que y", para lo cual es necesario que $0 < y - x$, en términos del conjunto $\mathbb{R}^+$ se tiene

$$x < y \Longleftrightarrow 0 < y - x \Longleftrightarrow (y - x) \in \mathbb{R}^+$$

En el caso en que $x \leq y$, se lee "x menor o igual que y", se tienen las dos posibilidades $x < y$ o $x = y$. De igual forma se define que $x > y$ y $x \leq y$. Una de las propiedades más importantes en el sistema de los números reales es conocida como la propiedad de **tricotomía**, la cual indica que para x, y en los reales se presenta una y sólo una de las siguientes posibilidades

$$x < y \qquad \vee \qquad x = y \qquad \vee \qquad x > y$$

La relación de orden le confiere al sistema de los números reales la estructura de ser un campo ordenado. La definición de la relación de orden se traslada (hereda) a cada uno de los sistemas numéricos precedentes y su vez, en los reales se definen operaciones que los sistemas anteriores presentan como es el caso del valor absoluto. Además se introduce la operación de potenciación, que permite comprimir una multiplicación sucesiva de un mismo número, es decir, $\underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n}$ se puede escribir como a^n y así

$$a^n = a \times a \times \ldots \times a$$

En el caso anterior la n es un natural, sin embargo, el exponente pueden ser cualquier número real, así como la base, por lo que tiene sentido hablar de expresiones como $6^{-2} = \frac{1}{36}$, $(-2)^6 = 64$, $(-4)^{-3} = -\frac{1}{64}$. Para a, b, n, m reales arbitrarios se cumplen las siguientes propiedades para la potenciación:

1. Potencia de un producto: $(ab)^n = a^n b^n$
2. Producto de potencias: $a^{n+m} = a^n a^m$,
3. Potencia de una potencia: $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ con $a \neq 0$
5. Potencia de un cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. siempre que $b \neq 0$

Y se define $a^0 = 1$ siempre que $a \neq 0$, donde 0^0 se conoce en el contexto del cálculo como una indeterminación. Como consecuencia de la operación de potenciación surgen las operaciones de **radicación** y **logaritmación** y así la expresión $6^3 = 216$ es posible escribirla como $\sqrt[3]{216} = 6$ y $\log_6 216 = 3$, es decir, en la radicación importa la base de la potenciación y en la logaritmación el exponente.

Independiente del signo de la base, siempre ocurre en los reales que x^2 es un número positivo o cero, así la ecuación $x^2 = -2$ (o ecuaciones como $x^4 = -2$) no es posible resolverla en los reales, solución que se presentaría como $\sqrt{-2}$. A raíz de ésta dificultad presentada en los números reales se construye un sistema numérico donde la dificultad se solvente, es decir, donde se puedan resolver raíces con índice par de números negativos; dicho conjunto se llama de los números complejos. Nótese que tiene que ser con índice par, ya que ecuaciones como $x^3 = -27$ tiene por solución $\sqrt[3]{-27} = -3$.

6.6. Números Imaginarios

Con base en la dificultad presentada en los números reales a la solución de algunas ecuaciones se define el número imaginario i llamado **unidad imaginaria** como $i = \sqrt{-1}$, e induce el conjunto

$$\mathbb{I} := \{ki : k \in \mathbb{R}\}$$

Es decir, el conjunto de los imaginarios está conformado por todos los múltiplos constantes del número i, donde el cero es un imaginario tomando $k = 0$. La adición y multiplicación por escalar están dadas por $ki + k_1 i = (k + k_1)i$ y $\alpha(ki) = (\alpha k)i$ donde k, k_1, α son números reales. De acuerdo con la definición de la unidad imaginaria, las potencias de i están dadas por

$i^1 = i$	$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$	$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1$
$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^6 \cdot i = -i$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$

Y así sucesivamente, con base en estos resultados obtenidos se tiene que las potencias de la unidad imaginaria se repiten cada cuatro unidades y el resultado siempre es algún número del conjunto $\{i, -1, -i, 1\}$; por lo tanto para determinar la n potencia de i se divide n por 4 y el residuo determina el valor de la potencia, como $n = 4k + r$ entonces

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i = (i^4)^k \cdot i^r = i^r$$

Por ejemplo, para hallar la potencia 2043 de i se tiene que $2043 = 4 \cdot 510 + 3$ y así $i^{2041} = i^3 = -i$. La multiplicación entre números imaginarios no cumple la propiedad de cerradura ya que para $5i$ y $-6i$ se tiene que $5i \cdot (-6i) = -30i^2 = (-30)(-1) = 30$ el cual no es un número imaginario sino real. De igual forma la división entre números imaginarios no está bien definida.

6.7. Números Complejos

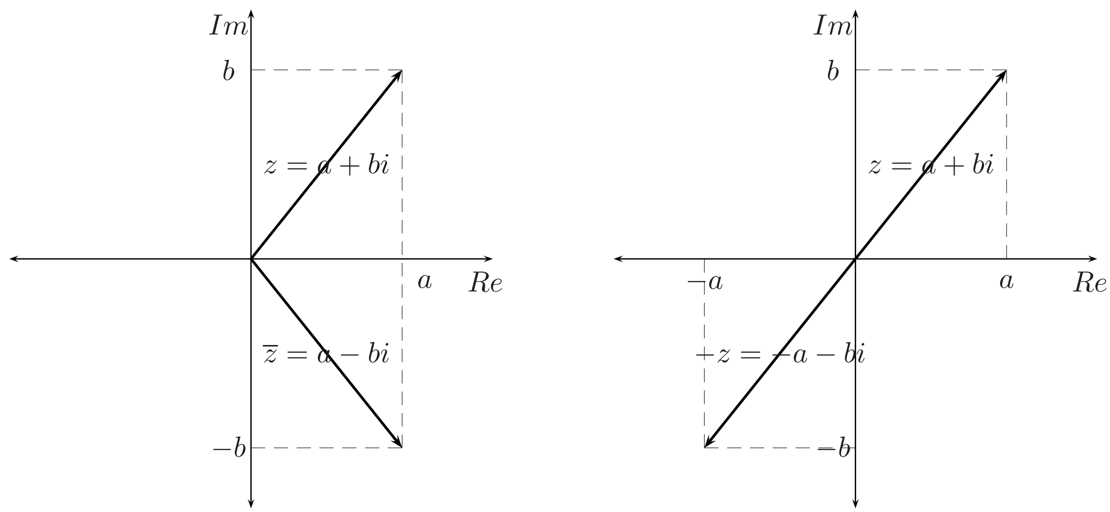
Con base en el conjunto de los números imaginarios y reales se construye el conjunto de los números complejos, el cual se denota como $\mathbb{C}$ y está definido como

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$$

Cada número complejo se puede representar en un plano cartesiano, en el eje horizontal se representan los números reales y en el eje vertical los números imaginarios, dicha plano recibe el nombre de **plano de Argand**, así cada número complejo se representa a través de un vector en el plano.

Sea $z = a + bi$ un número complejo, es decir, a, b son reales, en el caso en que $b = 0$ entonces $z = a$ que representa un número real lo cual se escribe como $Re(z) = a$, donde $Re(z)$ se lee "la parte real de z"; si por el contrario $a = 0$ resulta $z = bi$ el cual es un número imaginario se escribe $Im(z) = b$ se lee "la parte imaginaria de z". De acuerdo con esto se sigue que los números complejos contienen tanto a los reales como a los imaginarios. Para el número complejo $z = -2 + 5i$, la parte real es $Re(z) = -2$, mientras que la imaginaria es $Im(z) = 5$.

Asociado al números complejo $z = a + bi$ se encuentra otro número complejo llamado el **conjugado**, que se escribe como $\overline{z}$ y está dado por $\overline{z} = a - bi$, es decir, intercambia la parte imaginaria por su opuesto; geométricamente el conjugado representa el reflejo de z respecto al eje real, así para $z = -2 + 5i$, el conjugado es $\overline{z} = -2 - 5i$. Haciendo uso del teorema de Pitágoras se sigue que la magnitud (distancia al origen) del complejo z está dado por $\sqrt{a^2 + b^2}$, este número real recibe el nombre de **módulo** del complejo $z = a + bi$, se denota como $|z|$ y así $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. En el siguiente gráfico se ilustra tal situación



Ahora bien, para los números complejos $z = a + bi$ y $z_1 = a_1 + b_1 i$ donde a, b, a_1, b_1 son números reales, se define la adición como

$$z + z_1 = (a + bi) + (a_1 + b_1 i) = (a + a_1) + (b + b_1)i$$

Es decir, se suman las partes reales y las partes imaginarias de los complejos dados. Haciendo uso de la propiedad distributiva y de la potencia de la unidad imaginaria, la multiplicación entre estos números complejos está dada por

$$\begin{aligned} z \cdot z_1 =& (a + bi)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + ab_1 i + ba_1 i + bb_1 i^2 \\ =& (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + ba_1)i \end{aligned}$$

De acuerdo con la definición de la adición y multiplicación se sigue que los complejos son un campo, donde el módulo de la adición es el 0 y el módulo de la multiplicación es 1, el primero imaginario y real y el segundo solo real que se puede representar como $1 = 1 + 0i$. Mientras que el inverso aditivo de $z = a + bi$ es $-z = -a - bi$ y el inverso multiplicativo es $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi}$ con $a \neq 0$ o $b \neq 0$; geométricamente el inverso aditivo es el reflejo de $z = a + bi$ respecto del origen. Con base en los gráficos anteriores se tiene que los módulos de z, $\overline{z}$ y $-z$ son los mismos, se diferencian estos números complejos en su posición en el plano.

Una operación usual en los complejos se denomina multiplicar por la conjugada, así para la fracción $\frac{1}{a+bi}$ se multiplica en el numerador y el denominador por la conjugada que en este caso corresponde a $a - bi$ y se aplica la definición de multiplicación como sigue

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{(a^2-(-b^2)+(-ab+ab)i} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

En la fracción de la derecha, el denominador representa un número real y equivale $|z|^2$, es necesario que $a \neq 0$ o $b \neq 0$ para evitar la división por cero. El resultado anterior permite definir una división entre complejos, para lo que es necesario dividir por la conjugada del denominador.

En la siguiente tabla se hace un resumen de las propiedades que cumple cada sistema numérico de acuerdo con las operaciones de adición y multiplicación lo que le confiere una estructura algebraica, las estructuras de semigrupo, monoide y grupo son conmutativas, sin embargo no se hace explícito en la tabla por efectos de espacio; y los números irracionales no aparecen ya que las operaciones no son clausurativas, por lo que no tiene lugar el análisis de las propiedades; para los imaginarios sucede una condición similar para la operación de multiplicación.

Sistema	Operación	Clausu.	Conmuta	Asocia	Modulo	Inverso	Distribuye	Estructura
Naturales	$+$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$			$\checkmark$	Semigrupo
	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$			Monoide
Enteros	$+$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	Anillo con unitario
	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$			
Racionales	$+$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	Campo
	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$		
Reales	$+$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	Campo
	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$		
Imaginarios	$+$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$		Grupo
	$\times$							
Complejos	$+$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	Campo
	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$		